

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Symmetrien und Erhaltungssätze in der klassischen Physik,  
Quantenphysik und Teilchenphysik“

Verfasserin

Christina Peham

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2011

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 412 406

Studienrichtung lt. Zulassungsbescheid: UF Physik

Betreuerin: Privatdoz. Mag. Dr. Beatrix Hiesmayr



## Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Einleitung	7
Warum untersucht man Symmetrien in der Physik?	8
Überblick	9
<b>Teil 1. Symmetrien und Erhaltungssätze in der Physik</b>	<b>11</b>
Symmetrien in der klassischen Physik	13
1. Was versteht man unter Symmetrien?	13
2. Das Hamiltonprinzip und der Lagrangeformalismus	13
3. Lagrangeformalismus und Erhaltungsgrößen	16
4. Das Noethertheorem	24
Zusammenfassung	29
Symmetrien in der Quantenmechanik	31
Quantenmechanik	31
Von Symmetrien zu Erhaltungsgrößen	33
Raumverschiebung in der Quantenmechanik	35
Zeitverschiebung in der Quantenmechanik	38
Isotropie des Raums in der Quantenmechanik	41
Entartung von Zuständen und Zeemaneffekt	48
Diskrete Symmetrien	52
Parität	52
Zeitumkehr	55
Zusammenfassung	59
Symmetrien in der Teilchenphysik	61
Quantenfeldtheorie	62
Teilchen und Antiteilchen	70
Innere Symmetrien	71
Ablesche innere Symmetrien	71
Ladung	71
Baryonenzahl	73
Leptonenzahl	74

Nicht-abelsche innere Symmetrien - der Isospin	75
Strangeness und Hyperladung	81
Das CPT-Theorem	84
Eichsymmetrien, spontane Symmetriebrechung und die "Weltformel"	91
Zusammenfassung	98
<b>Symmetrien und Erhaltungssätze im Physikunterricht</b>	<b>101</b>
Wozu Symmetrien und Erhaltungssätze im Physikunterricht?	103
Der Isospin im Physikunterricht	105
Was sind die Lernziele oder wieso sollte der Isospin im Unterricht überhaupt vorkommen?	105
Wann kann der Isospin im Unterricht eingebaut werden?	105
Welches Vorwissen ist notwendig?	106
Motivation - Wieso beschäftigt man sich mit Erhaltungsgrößen?	107
Wie kann vorgegangen werden?	107
Ausblick	110
<b>Anhang</b>	<b>111</b>
<b>Begriffslexikon</b>	<b>151</b>
Literaturverzeichnis	165
Lebenslauf	167

## Vorwort

In der folgenden Arbeit beziehen sich alle Verweise einzelner Gleichungen auf das jeweilige Kapitel. Ausnahmen sind gesondert gekennzeichnet.

Im zweiten Teil der Diplomarbeit "Symmetrien im Physikunterricht" wird auf die weibliche Bezeichnung aus Lesbarkeits- und Platzgründen verzichtet. Die vorkommenden männlichen Titulierungen gelten somit auch für weibliche Repräsentantinnen.

Alle Grafiken in der Diplomarbeit wurden mit Hilfe des Programms **[GeoGebra]** erstellt.



## Einleitung

Der Begriff Symmetrie ist jedem von uns bekannt und fasziniert die Menschheit schon seit Jahrhunderten von Jahren. Schon bei den Griechen hatte der Kreis bzw. die Kugel wegen ihrer perfekten Symmetrie eine viel wichtigere Bedeutung als alle anderen geometrischen Figuren. Die Erde galt damals schon als kugelförmig in einem ebenfalls kugelförmigen Universum und auch in philosophischer Hinsicht findet sich bei Platons Kugelmenschen (der Inbegriff der Vollkommenheit) die Symmetrie wieder.

Neben den geistigen Konstrukten begegnet man den Symmetrien viel alltäglicher in der Natur. Blumen, Bienenwaben oder Eiskristalle zeigen erstaunlich regelmäßige Muster auch wenn sie keine solch vollkommene Symmetrie aufweisen wie ein Kristall <sup>1</sup>. Wir neigen dazu, Symmetrie als eine Art Perfektion anzuerkennen, obwohl die meisten Dinge unseres alltäglichen Lebens erst durch eine kleine Abweichung davon interessant werden.

Betrachten wir das perfekt symmetrische Gesicht einer Person, so empfinden wir es zwar als schön, aber auch als langweilig, wo hingegen leichte Verletzungen dieser Symmetrie die Person lebhafter und interessanter erscheinen lassen. Auch in der Astronomie zeigt sich, dass sich die Planeten nicht auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen und auch die Erde selbst hat keineswegs die Form einer perfekten Kugel.

So unphysikalisch diese Betrachtungen auf den ersten Blick erscheinen mögen, diese alltäglichen Eindrücke beinhalten schon einige wichtige Überlegungen im Umgang mit Symmetrien in den Grundgesetzen der Physik. So ist die geometrische Definition zu Beginn eng mit der physikalischen verknüpft, löst sich aber bald von dieser und wird in abstrakter Form weiterverwendet. Einen wichtigen Stellenwert wird auch die Symmetrieverletzung einnehmen, da diese oft leichter beobachtbar ist und interessante Konsequenzen mit sich bringt.

---

<sup>1</sup>Vgl. [Feynman] Seite 726

### Warum untersucht man Symmetrien in der Physik?

Wie kommt man jedoch überhaupt dazu Symmetrien zu untersuchen? Welche Erkenntnisse können daraus für die Physik gewonnen werden?

*” Wenn die Gesetzmäßigkeiten der subatomaren Welt vollständig bekannt wären, so bestünde keine Notwendigkeit mehr zur Untersuchung von Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Der Zustand jedes Teils der Welt könnte aus einer Grundgleichung berechnet werden, in der alle Symmetrien und Erhaltungssätze enthalten wären.”*<sup>2</sup> Das heißt: Würde man die ”Weltformel” kennen, so müsste man sich keine Gedanken mehr über Symmetrien machen.

*Die Untersuchung der verschiedenen Symmetrien und Erhaltungssätze und die Konsequenzen daraus liefern aber gerade wesentliche Hinweise für die Formulierung der fehlenden Gleichungen,*<sup>3</sup> wenn das prinzipiell überhaupt möglich ist.

---

<sup>2</sup>Vgl. [**Frauenfelder/Henley**] Seite 184

<sup>3</sup>Ebenda



## Überblick

In den folgenden Kapiteln soll nun gezeigt werden, wie man Symmetrien "entdeckt", wie man Symmetrien mathematisch beschreibt, wie man daraus auf Erhaltungssätze schließen kann und wie das mit den fundamentalen Wechselwirkungen und damit mit der "Weltformel" zusammenhängt.

Im ersten Kapitel, Symmetrien in der klassischen Physik wird zu Beginn definiert, was man in der Physik unter einer Symmetrie versteht. Anschließend wird gezeigt, welche mathematischen Formulierungen für deren Handhabung nötig bzw. hilfreich sind. Schließlich wird auch noch der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen mit dem Noethertheorem aufgestellt und damit die vier Erhaltungsgrößen der klassischen Mechanik Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt berechnet.

Das folgende Kapitel über Symmetrien in der Quantenmechanik legt nun die Ideen der klassischen Physik wie man von Symmetrien auf Erhaltungsgrößen kommt auf die Quantenmechanik um. Neben den zuvor erwähnten Erhaltungsgrößen wird hier zusätzlich noch die Entartung von Zuständen und der Zeemaneffekt besprochen, wo zum ersten Mal von Symmetriebrechung die Rede sein wird. Auch die diskreten Symmetrien werden in diesem Kapitel bereits angesprochen werden.

Das letzte "theoretische" Kapitel bezieht sich auf Symmetrien in der Teilchenphysik, das einerseits in bestimmten Situationen die quantenmechanischen Formulierungen beibehält und andererseits neue Formulierungen fordert. Hier werden wieder neue Konzepte (Teilchen/ Antiteilchen) und neue Erhaltungsgrößen (Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl, Strangeness, Hyperladung) auftauchen. Zudem wird die Symmetriebrechung genauer betrachtet werden und damit schließlich auch der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und den fundamentalen Wechselwirkungen.

Der letzte Teil beschäftigt sich am Beispiel Isospin damit, Symmetrien und Erhaltungssätze und ihren Zusammenhang im Physikunterricht zu behandeln. Das geschieht mit Hilfe eines selbst erstellten Lernpfades.



## Teil 1

# Symmetrien und Erhaltungssätze in der Physik



# Symmetrien in der klassischen Physik

## 1. Was versteht man unter Symmetrien?

Unter Symmetrie in der Physik<sup>4</sup> versteht man die Invarianz unter einer bestimmten Transformation. Ein Palindrom ändert sich beispielsweise nicht, wenn es der Transformation der Umkehr der Buchstabenreihenfolge unterzogen wird. Es ist also invariant bezüglich dieser Transformation.

In der Physik sind die Objekte, deren Symmetrie studiert wird, zunächst physikalische Systeme. Die Systeme und ihre Dynamik werden in Modellen, den Bewegungsgleichungen, mathematisch beschrieben. Die Symmetrie der Systeme sollte sich daher in den mathematischen Beziehungen oder Objekten zeigen, die das System beschreiben. Das heißt, die Bewegungsgleichungen sollen vor und nach der Anwendung von Operationen unverändert bleiben. Eine besonders wichtige Konsequenz ergibt sich daraus für abgeschlossene Systeme: Immer wenn ein Gesetz bezüglich einer bestimmten Symmetrioperation invariant ist, gibt es eine dazugehörige Erhaltungsgröße. Das Finden von Erhaltungsgrößen ist gerade deshalb von Bedeutung, weil sie zur Kennzeichnung von physikalischen Zuständen benutzt werden können.

## 2. Das Hamiltonprinzip und der Lagrangeformalismus

**2.1. Die Euler-Lagrange-Gleichung.** Zur Beschreibung und zum Finden von Erhaltungsgrößen erweisen sich die Newton'schen Bewegungsgleichungen oft als sehr unpraktisch und unhandlich, weshalb ein neuer Formalismus, der eine andere, elegantere Formulierung der Bewegungsgleichungen ergibt, eingeführt wurde.

Den Ausgangspunkt stellt hierbei die Variationsrechnung, die sich mit der Suche nach einer Funktion beschäftigt, für die ein bestimmtes Funktional (siehe  $\rightarrow$  Begriffslexikon)  $J[y] = J$  extremal wird. Aus gegebenen Randwerten und der Suche nach einer Funktion, die das

---

<sup>4</sup>Vgl. im folgenden Abschnitt hauptsächlich [Fließbach I], mit Ergänzungen von [Greiner 5]

Funktional  $J$  minimal macht, kann man die *Euler-Lagrange-Gleichung* herleiten (siehe dafür Fließbach, Mechanik, Kapitel 12):

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \quad \text{Euler - Lagrange - Gleichung}} \quad (1)$$

wobei  $F$  eine skalare Funktion ist, die von den Koordinaten  $x$  und  $y$  und dessen erster Ableitung  $y'$  abhängt.

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist gleichbedeutend mit der Stationarität des Funktional  $J[y]$ . Sie ist damit eine notwendige Bedingung für ein Extremum; eine genauere Untersuchung kann zeigen, ob im konkreten Fall tatsächlich ein Minimum oder Maximum vorliegt. Man kann die Euler-Lagrange-Gleichung auch für mehrere Argumente, Funktionen oder höhere Ableitungen verallgemeinern.

## 2.2. Hamiltonsches Prinzip und der Lagrangeformalismus.

Die physikalische Bedeutung der Euler-Lagrange-Gleichung erschließt sich erst mit dem *Hamiltonschen Prinzip*, welches zu einer eleganteren Formulierung der Grundgesetze der Mechanik, den Lagrangegleichungen, führt. Nun verwendet man anstelle der üblichen Koordinaten verallgemeinerte bzw. generalisierte Koordinaten der Form

$$q_1, q_2, \dots, q_f \quad (2)$$

wobei  $f$  die Anzahl der Freiheitsgrade ist.

Statt dem allgemeinen Funktional  $J[y]$  von vorhin betrachtet man das Wirkungsfunktional  $S$ :

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t), \quad (3)$$

dabei steht  $q$  für  $(q_1, q_2, \dots, q_f)$  und  $\dot{q}$  für  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f)$ .

Der Buchstabe  $L$  steht für die *Lagrangefunktion* (der nichtrelativistischen Mechanik), die gefunden wird indem man die Wirkung extremal werden lässt:

$$S[q] = \int L dt \rightarrow \text{Extremum} \Rightarrow$$

$$\boxed{L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) \quad \text{Lagrangefunktion}} \quad (4)$$

Die Lagrangefunktion in der nicht relativistischen Mechanik ist also nichts anderes als die Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie, jeweils als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten. Da man verschiedene verallgemeinerte Koordinaten für ein bestimmtes System einführen kann, liegt die Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  nicht eindeutig fest. Es können Zusatzterme zu  $L$  auftreten, diese verändern die Bewegungsgleichungen jedoch nicht (siehe nächstes Kapitel  $\rightarrow$  Eichtransformation, Seite 15). Die Lagrangefunktion eine theoretische Größe und damit keine Observable.

Die Forderung, dass das Wirkungsfunktional  $S[q]$  stationär ist, also die Änderung gleich Null, wird als das Hamiltonsche Prinzip bezeichnet.

$$\boxed{\text{Hamiltonsches Prinzip : } \delta S[q] = 0} \quad (5)$$

Diese Bedingung führt zu den Bewegungsgleichungen, den *Lagrange-gleichungen*:

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}} \quad (6)$$

Die Lagrangegleichungen der Mechanik sind also die Euler-Lagrange-Gleichungen des Variationsproblems  $\delta S = 0$ .

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass die Bewegung so abläuft, dass die Bahnkurve die Wirkung stationär macht. Es ist dabei nicht wichtig, ob es sich bei dem stationären Punkt um ein Minimum handelt. In konkreten Anwendungen macht die Lösung der Lagrange-gleichung  $S$  im Allgemeinen minimal. Daher heißt das Hamiltonsche Prinzip auch *Prinzip der kleinsten Wirkung*.

**2.3. Eichtransformation.** Die Lagrangefunktion ist ein besonders einfacher Ausgangspunkt zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Nun kann es aber verschiedene Lagrangefunktionen geben, die zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Solche Lagrangefunktionen werden als zueinander gleichwertig betrachtet, weil ihr physikalischer Inhalt derselbe ist. Angesichts der Äquivalenz der Bewegungsgleichungen mit  $\delta \int dt L = 0$  ist ersichtlich, dass eine gegebene Lagrangefunktion  $L$  gleichwertig zu  $L^* = C \cdot L$  oder zu  $L^* = L + C$  mit  $C$  als Konstante ist.

Eine wichtige Klasse von gleichwertigen Lagrangefunktionen ergibt sich aus den sogenannten *Eichtransformationen*. Dabei wird zu  $L$  die totale Zeitableitung einer Funktion  $f(q, t)$  addiert.

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) \quad (7)$$

Die Änderung der Lagrangefunktion unter einer Galileitransformation ist eine solche Eichtransformation. Dass die beiden Lagrangegleichungen zur selben Bewegungsgleichung führen, ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial q} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} f(q, t) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} f(q, t)}_{\frac{\partial}{\partial q}} \\ \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} f(q, t) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} f(q, t) \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ \Rightarrow L \text{ und } L^* &\text{ ergeben diesselben Bewegungsgleichungen} \end{aligned}$$

Die Eichtransformation der Lagrangefunktion hat ihren Namen von der Eichtransformation der Elektrodynamik, wo dessen Invarianz die Erhaltung der elektrischen Ladung garantiert. In anderen Bereichen der Physik, wo Symmetrien betrachtet werden, spielt diese Transformation ebenfalls eine wichtige Rolle.

### 3. Lagrangeformalismus und Erhaltungsgrößen

Mit dem Lagrangeformalismus kann man sich schon die ersten Gedanken bezüglich Erhaltungsgrößen machen:

Die Lagrangefunktion  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  kann von den verallgemeinerten Koordinaten, deren ersten Ableitungen und von der Zeit abhängen. Falls  $L$  von einer oder mehrere Koordinaten oder der Zeit unabhängig ist, ergibt sich die Aussage, dass aus jeder Invarianz der Lagrangefunktion (also aus jeder Symmetrie des Systems) eine Erhaltungsgröße folgt.

Geht man beispielsweise von einem Inertialsystem (IS) mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  aus, so kann man folgende Operation betrachten

$$x_i \rightarrow x_i^*, \quad t \rightarrow t^* \quad (8)$$



wobei  $x_i^*, t^*$  und  $x_i, t$  durch eine Galileitransformation verknüpft sein sollen, da bei der Anwendung dieser Transformationen die Bewegungsgleichungen forminvariant bleiben:

$$x_i^* = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j - v_i t - a_i, \quad t^* = t - t_0 \quad (9)$$

Durch (8) und (9) werden im Einzelnen folgende Operationen beschrieben:

- (1) Zeitliche Verschiebung um einen konstanten Betrag  $t_0$
- (2) Räumliche Verschiebung um einen konstanten Vektor  $a_i$
- (3) Räumliche Drehung um drei konstante Winkel (in  $\alpha_{ij}$  enthalten)
- (4) Räumliche Verschiebung um den zeitabhängigen Vektor  $v_i t$

Äußere Einflüsse auf ein System führen im Allgemeinen dazu, dass das System nicht invariant unter den angeführten Operationen ist. Für alle abgeschlossenen Systeme gelten diese Symmetrioperationen und stellen damit Eigenschaften des Raums und der Zeit dar. Die Symmetrien heißen, wenn sie jeweils unter (1), (2), (3) bzw. (4) invariant sind:

- (1) Homogenität der Zeit
- (2) Homogenität des Raums
- (3) Isotropie des Raums
- (4) Relativität der Raum und Zeit

Stellt man die allgemeine Lagrangefunktion für ein System aus  $N$  Massenpunkten auf, so lautet diese:

$$L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (10a)$$

Der Ortsvektor des  $\nu$ -ten Massenpunktes kann durch kartesische Koordinaten dargestellt werden,  $\vec{r}_\nu := (x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu)$ .

Da die Symmetrioperationen in abgeschlossenen Systemen sicher invariant sind, kann man die Lagrangefunktion auch anders formulieren (mit Potential für konservative Kräfte):

$$L_0(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^2 - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} U_{\nu\mu}(|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|) \quad (10b)$$

Mit dem abgeschlossenen und durch  $L_0$  beschriebenen System kann nun untersucht werden, wie aus den Symmetrien Erhaltungsgrößen ermittelt werden können.

**3.1. Homogenität der Zeit.** Die jeweilige Transformation wird in Abhängigkeit von einem Parameter  $\epsilon$  angeschrieben, wobei  $\epsilon = 0$  die Identitätstransformation ergeben soll. Dadurch erhält man eine einheitliche Form der Invarianzbedingung.

Für eine zeitliche Verschiebung ist folgende Transformation definiert:

$$\vec{r}_\nu \rightarrow \vec{r}_\nu^* = \vec{r}_\nu, \quad t \rightarrow t^* = t + \epsilon \quad (11)$$

Dies ist eine Spezialfall von (8) und (9). Aus  $\vec{r}_\nu^* = \vec{r}_\nu$  und  $dt^* = dt$  folgt  $d\vec{r}_\nu^*/dt^* = d\vec{r}_\nu/dt$  oder  $\dot{\vec{r}}_\nu^* = \dot{\vec{r}}_\nu$ . Für eine allgemeine Vielteilchen-Lagrangefunktion gilt daher

$$L^* = L(..., \vec{r}_\nu^*, ..., \dot{\vec{r}}_\nu^*, ..., t^*) = L(..., \vec{r}_\nu, ..., \dot{\vec{r}}_\nu, ..., t + \epsilon) \quad (12)$$

Betrachtet man nun die totale Ableitung  $dL^*/d\epsilon$ , so ergibt sich unter Verwendung der Lagrangeleichungen:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dL^*}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{\partial L}{\partial t} \text{ und } \frac{dL}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \frac{d\dot{\vec{r}}_\nu}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{\text{Lagrange gl.}}{=} \\ &\sum_{\nu=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_\nu + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \dot{\vec{r}}_\nu \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{\text{part. Abl.}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \right) \dot{\vec{r}}_\nu + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\Rightarrow \left( \frac{dL^*}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( L - \underbrace{\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \dot{\vec{r}}_\nu}_{\sum_{\nu=1}^N m \dot{\vec{r}}_\nu^2} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

wobei für  $\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}$  die Summe der Ableitungen der einzelnen Komponenten gemeint ist:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} := \sum_{\nu=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{\nu i}}$$

Im letzten Schritt von (13) wurde die Lagrangefunktion von N Massenpunkten verwendet.

Die Zeitdifferenz  $t_1 - t_2 = t_1^* - t_2^*$  hängt nicht von  $\epsilon$  ab. Die Lagrangefunktion  $L_0$  eines abgeschlossenen Systems ist damit nicht explizit zeitabhängig; daher gilt  $dL_0^*/d\epsilon = 0$ . Hiermit erhält man

$$\left( \frac{dL_0^*}{d\epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = 0 \Rightarrow L_0 - \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \dot{\vec{r}}_\nu = T + U = \text{const.} \quad (14)$$

Hierbei wurde  $L_0 = T - U$  und  $\sum (\partial L_0 / \partial \dot{\vec{r}}_\nu) \dot{\vec{r}}_\nu = 2T$  verwendet. Auf der linken Seite von (11) steht die Symmetrie- oder Invarianzbedingung, auf der rechten Seite die zugehörige Erhaltungsgröße. Dieses Schema wiederholt sich bei den im Folgenden betrachteten Symmetrien.

Damit zeigt sich der Zusammenhang zwischen der Invarianz gegenüber (8) und der Energieerhaltung für das System. Dieser Zusammenhang gilt tatsächlich für alle Gebiete der Physik: Die Energie eines abgeschlossenen Systems wird als diejenige Erhaltungsgröße identifiziert, die sich aus der Homogenität der Zeit ergibt:

$$\boxed{\text{Homogenität der Zeit} \rightarrow \text{Energieerhaltung}} \quad (15)$$

**3.2. Homogenität des Raums.** Betrachtet man eine räumliche Verschiebung um  $\epsilon$  in  $\vec{n}$ -Richtung, so ergibt sich wieder ein Spezialfall von (8) und (9):

$$\vec{r}_\nu \rightarrow \vec{r}_\nu^* = \vec{r}_\nu + \epsilon \vec{n}, \quad t \rightarrow t^* = t \quad (16)$$

Der Einheitsvektor  $\vec{n}$  kann in eine beliebige Richtung zeigen; Für eine allgemeine Lagrangefunktion ergibt die Transformation (16)

$$L^* = L(..., \vec{r}_\nu^*, ..., \dot{\vec{r}}_\nu^*, ..., t^*) = L(..., \vec{r}_\nu + \epsilon \vec{n}, ..., \dot{\vec{r}}_\nu, ..., t) \quad (17)$$

Wegen  $d\vec{r}_\nu^* = d\vec{r}_\nu$  ändert sich die Geschwindigkeit nicht. Damit kann man die totale Ableitung  $dL^*/d\epsilon$  folgendermaßen anschreiben (wieder unter Verwendung der Lagrangegleichungen):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dL^*}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} &= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \vec{n} \stackrel{\text{Lagrange gl.}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \vec{n} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N \vec{p}_\nu \vec{n} = \frac{d\vec{n} \cdot \vec{P}}{dt} \quad (18)
\end{aligned}$$

Mit  $\vec{P} = \sum \partial L / \partial \dot{\vec{r}}_\nu$  wurde der Gesamtimpuls (Schwerpunktimpuls) des Systems bezeichnet.

Die Koordinatendifferenzen  $\vec{r}_\nu^* - \vec{r}_\mu^* = \vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu$  hängen nicht von  $\epsilon$  ab. Daher ist die Lagrangefunktion  $L_0$  eines abgeschlossenen Systems invariant unter der Transformation (16):

$$\left(\frac{dL_0^*}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const.} \quad (19)$$

Da  $\vec{n}$  beliebig ist, folgt aus der Konstanz von  $\vec{n} \cdot \vec{P}$  auch die von  $\vec{P}$ .

Wieder gilt ganz allgemein: Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems wird als diejenige Erhaltungsgröße identifiziert, die sich aus der Homogenität des Raums ergibt:

$$\boxed{\text{Homogenität des Raums} \rightarrow \text{Impulserhaltung}} \quad (20)$$

**3.3. Isotropie des Raums.** Betrachtet man eine infinitesimale Drehung um einen konstanten Winkel  $\epsilon$ , wobei die Drehachse durch den konstanten Einheitsvektor  $\vec{n}$  festgelegt ist (siehe Abb. 1), so lautet die Transformation:

$$\vec{r}_\nu \rightarrow \vec{r}_\nu^* = \vec{r}_\nu + (\vec{n} \times \vec{r}_\nu)\epsilon \quad t \rightarrow t^* = t \quad (21)$$

Da  $\epsilon$  und  $\vec{n}$  zeitunabhängig sind, folgt für die Geschwindigkeiten

$$\dot{\vec{r}}_\nu \rightarrow \dot{\vec{r}}_\nu^* = \dot{\vec{r}}_\nu + (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu)\epsilon \quad (22)$$

Für eine allgemeine Lagrangefunktion ergibt diese Transformation

$$L^* = L(\dots, \vec{r}_\nu^*, \dots, \dot{\vec{r}}_\nu^*, \dots, t^*)$$

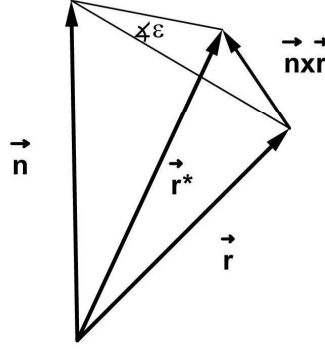


ABBILDUNG 1. Die Änderung des Ortsvektors bei Raumdrehung

$$= L(\dots, \vec{r}_\nu + (\vec{n} \times \vec{r}_\nu)\epsilon, \dots, \dot{\vec{r}}_\nu + (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu)\epsilon, \dots, t) \quad (23)$$

Damit kann man die totale Ableitung  $dL^*/d\epsilon$  folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dL^*}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} &= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_\nu) + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{d\vec{p}_\nu}{dt} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_\nu) + \vec{p}_\nu \cdot \frac{d(\vec{n} \times \vec{r}_\nu)}{dt} \right) \\ &\stackrel{\text{part. Abl.}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N \vec{n} \cdot (\vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu) = \frac{d(\vec{n} \cdot \vec{L})}{dt} \end{aligned} \quad (24)$$

Dabei ist  $\vec{L} = \sum_{\nu} \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$  der Gesamtdrehimpuls des Systems.

Die Lagrangefunktion  $L_0$  hängt nur von  $\dot{\vec{r}}_\nu^2$  und von den Abständen  $|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$  ab. Für diese Größe gilt

$$(\dot{\vec{r}}_\nu^*)^2 = \dot{\vec{r}}_\nu^2 + O(\epsilon^2), \quad (\vec{r}_\nu^* - \vec{r}_\mu^*)^2 = (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)^2 + O(\epsilon^2) \quad (25)$$

Die Terme  $O(\epsilon^2)$  treten auf, weil die Transformation (18) die Drehung

nur in erster Ordnung in  $\epsilon$  korrekt beschreibt. Die Invarianzbedingung  $(dL_0^*/d\epsilon)_{\epsilon=0} = 0$  ist jedenfalls wieder erfüllt. Damit erhalten wir

$$\left(\frac{dL_0^*}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad (26)$$

Da  $\vec{n}$  beliebig ist, folgt aus der Konstanz von  $\vec{n} \cdot \vec{L}$  auch die von  $\vec{L}$ .

Wieder gilt ganz allgemein:

Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems wird als diejenige Erhaltungsgröße identifiziert, die sich aus der Isotropie des Raums ergibt:

$$\boxed{\text{Isotropie des Raums} \rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}} \quad (27)$$

**3.4. Relativität des Raums und der Zeit.** Bewegen sich zwei Systeme relativ zueinander mit der infinitesimalen und konstanten Geschwindigkeit  $\epsilon \vec{n}$ , so sieht die Transformation folgendermaßen aus:

$$\vec{r}_\nu \rightarrow \vec{r}_\nu^* = \vec{r}_\nu + \epsilon \vec{n} t \quad (28)$$

Daraus folgt

$$\dot{\vec{r}}_\nu \rightarrow \dot{\vec{r}}_\nu^* = \dot{\vec{r}}_\nu + \epsilon \vec{n} \quad (29)$$

Für eine allgemeine Lagrangefunktion ergibt diese Transformation

$$L^* = L(..., \vec{r}_\nu^*, ..., \dot{\vec{r}}_\nu^*, ... t^*) = L(..., \vec{r}_\nu + \epsilon \vec{n} t, ..., \dot{\vec{r}}_\nu + \epsilon \vec{n}) \quad (30)$$

Damit ergibt sich die totale Ableitung  $dL^*/d\epsilon$  zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL^*}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} &= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot \vec{n} t + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \vec{n} \\ &= \vec{n} \cdot \sum_{\nu=1}^N (\dot{\vec{p}}_\nu t + \vec{p}_\nu) \stackrel{\text{part. Abl.}}{\equiv} \frac{d(\vec{n} \cdot \vec{P} t)}{dt} \end{aligned} \quad (31)$$

Dabei ist  $\vec{P} = \sum_\nu \vec{p}_\nu$  der Schwerpunktimpuls.

Die Lagrangefunktion  $L_0$  hängt nur von  $\dot{\vec{r}}_\nu^2$  und von den Abständen  $|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$  ab. Die Abstände sind invariant unter der Transformation (28); daher gilt für die potenzielle Energie  $U^* = U$ . In der kinetischen Energie ist dagegen (29) zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} L_0^* &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\dot{\vec{r}}_\nu^*)^2 - U^* = T + \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \epsilon + O(\epsilon)^2 \\ &= L_0 + \epsilon \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{n} \cdot \vec{r}_\nu + O(\epsilon)^2 \\ &= L_0 + \epsilon M \frac{d(\vec{n} \cdot \vec{R})}{dt} + O(\epsilon)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Im letzten Schritt wurden die Schwerpunktkoordinate  $\vec{R} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu / M$  und die Gesamtmasse  $M = \sum_\nu m_\nu$  eingeführt.

Nach (32) ist die Lagrangefunktion  $L_0$  nicht invariant unter der Transformation (28). Der bei der Transformation auftretende zusätzliche Term ist aber eine totale Zeitableitung. Ein solcher Zusatzterm ändert die Bewegungsgleichungen nicht und damit sind diese und das System invariant unter der Transformation (28).

$$\left( \frac{dL_0^*}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = M \frac{d(\vec{n} \cdot \vec{R})}{dt} \quad (33)$$

Im Gegensatz zu den oben diskutierten Fällen verschwindet  $dL_0^*/d\epsilon$  also nicht. Wenn man aber (28) für  $L_0^*$  anschreibt und mit (33) kombiniert, erhält man  $d(\vec{n} \cdot \vec{P}t)/dt = M \cdot d(\vec{n} \cdot \vec{R})/dt$ . Mit  $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$  und unter Berücksichtigung der Beliebigkeit von  $\vec{n}$  ergibt das  $d(\vec{R}t - \vec{R})/dt = 0$  oder

$$\dot{\vec{R}}t - \vec{R} = \text{const.} \quad (34)$$

Aus (34) ergibt sich dieselbe Aussage wie (19) (Gesamtimpulserhaltung); inhaltlich ergibt sich also keine neue Erhaltungsgröße.

Zusammenfassend kann man sagen, dass ein abgeschlossenes System invariant unter Galileitransformationen ist. Die Galileitransformationen bilden eine 10-parametrische Gruppe. Jeder der 10 Invarianzen oder Symmetrien kann einer Erhaltungsgröße zugeordnet werden, und

zwar die Energie  $E$ , der Impuls  $\vec{P}$ , der Drehimpuls  $\vec{L}$  und der Schwerpunkt  $\vec{R}t - \vec{R}$ .

#### 4. Das Noethertheorem

Auf der Grundlage des Hamiltonschen Prinzips kann der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen wesentlich allgemeiner formuliert werden, als bisher. Dieser allgemeinere Zusammenhang, der als Noethertheorem bezeichnet wird, hat den Vorteil, dass er auch bei allgemeinen Lagrangefunktionen und Lagrangedichten, in denen nicht von vornherein klar ist, was die Erhaltungsgröße ist, anwendbar ist:

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (35)$$

Die Argumente der Lagrangefunktion stehen wieder als Abkürzung für beliebige verallgemeinerte Koordinaten oder auch kartesische Koordinaten  $q_i(t)$ .

Die Transformationen der Koordinaten und der Zeit können folgendermaßen angeschrieben werden:

$$q_i^*(t^*) = q_i(t) + \epsilon \psi_i(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (36)$$

$$t^*(t) = t + \epsilon \phi(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (37)$$

Vergleicht man nun das Funktional  $S[q(t)]$  für die Bahn  $q(t)$  und die Randwerte  $t_1$  und  $t_2$  mit dem Funktional  $S^* = S[q^*(t^*)]$  erhält man wenn  $S^* = S$  die Invarianz des Funktionals unter der Transformation:

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \frac{dq}{dt}, t) \quad (Invarianz) \quad (38)$$

Da das Funktional  $S$  die Bewegungsgleichung festlegt, ist die Invarianz  $S^* = S$  der mathematische Ausdruck für die Symmetrie des durch  $L$  beschriebenen Systems gegenüber der betrachteten Transformation.

$$\begin{aligned} \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt [L(q, \frac{dq}{dt}, t) + \epsilon \frac{d}{d\epsilon} (L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt}) + O(\epsilon^2)|_{\epsilon=0}] \end{aligned} \quad (39)$$



In der zweiten Zeile wurde der Integrand als Funktion  $f(\epsilon)$  aufgefasst und gemäß  $f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + O(\epsilon^2)$  entwickelt. Die *Invarianzbedingung* lautet damit:

$$\boxed{\frac{d}{d\epsilon} \left[ L(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = 0} \quad (40)$$

Unter der Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ergeben sich die Ableitungen zu

$$\frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon \frac{d\phi(q, \dot{q}, t)}{dt} = 1 + \epsilon \frac{d\phi}{dt} \quad (41)$$

$$\frac{dq_i^*}{dt^*} = \frac{dq_i^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \left( \dot{q}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \left( 1 - \epsilon \frac{d\phi}{dt} \right) = \dot{q}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon \dot{q}_i \frac{d\phi}{dt} \quad (42)$$

Ausgewertet ergibt das:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\epsilon} \left[ L(q_i + \epsilon\psi_i, \dot{q}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon \dot{q}_i \frac{d\phi}{dt}, t + \epsilon\phi) \left( 1 + \epsilon \frac{d\phi}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \psi_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\psi_i}{dt} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \phi + L \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Mit  $\frac{d}{dt} \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$  erhalten wir aus (43):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^* \right) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Die Invarianzbedingung bedeutet, dass die linke Seite von (44) verschwindet. Damit lautet das *Noethertheorem*:

$$Q = Q(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \phi = \text{const.} \quad (45)$$

Das Noethertheorem verbindet eine Symmetrie, die in der Invarianz gegenüber einer einparametrigen Transformation besteht, mit einer Erhaltungsgröße  $Q$ :

$$\boxed{\text{Symmetrie} \rightarrow (\text{Noether}) \text{ Erhaltungsgröße}} \quad (46)$$

**4.1. Energieerhaltung mit Noethertheorem.**  $L$  hängt nicht explizit von der Zeit ab und damit ergibt sich die Transformation zu:

$$\begin{aligned} q_i^* &= q_i, & \psi_i &= 0 \\ t^* &= t + \epsilon, & \phi &= 1 \end{aligned} \quad (47)$$

Daraus ergibt sich:

$$q_i^*(t^*) = q_i(t), \quad \frac{dt^*}{dt} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dq_i^*}{dt^*} = \frac{dq_i}{dt} \quad (48)$$

Die Invarianzbedingung ausgewertet ergibt

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( q_i^*, \frac{dq_i^*}{dt^*} \right) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} L(q_i, \dot{q}_i) = 0 \quad (49)$$

Da die Invarianzbedingung erfüllt ist, folgt

$$Q = L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \text{const.} \quad (50)$$

Für  $L = \sum m_i \dot{x}_i^2 / 2 - U(x)$  (mit kartesischen Koordinaten  $q_i = x_i$ ) ist  $-Q$  gleich der Energie des Systems.

**4.2. Impulserhaltung mit dem Noethertheorem.**  $L$  hängt nicht explizit von einer bestimmten Koordinate  $q_k$  ab. Damit ergibt sich die Transformation zu

$$\begin{aligned} q_i^* &= q_i + \delta_{ik}, & \psi_i &= \delta_{ik} \\ t^* &= t, & \phi &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Die Invarianzbedingung wieder ausgewertet liefert:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( q^*, \frac{dq_i^*}{dt^*}, t^* \right) \frac{dt^*}{dt} \right] = \frac{d}{d\epsilon} L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (52)$$

Hierbei wurde  $\partial L / \partial q_k = 0$  berücksichtigt. Da die Invarianzbedingung erfüllt ist, gilt

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k = \text{const} \quad (53)$$

Dies ist der zur Koordinate  $q_k$  gehörige verallgemeinerte Impuls  $p_k$ .

**4.3. Drehimpulserhaltung mit dem Noethertheorem.** Die Transformation bei Rotationen ergibt sich zu:

$$q_i^* = q_i + \varepsilon_{ijk} n_j q_k \quad \text{und} \quad t^* = t \quad (54)$$

Das ist genau dieselbe Transformation, die schon bei der Herleitung der Drehimpulserhaltung ohne Noethertheorem verwendet wurde, nur dass sie hier mit dem Epsilontensor formuliert wurde.

Für die ausgewertete Invarianzbedingung ergibt sich:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L(q_i^*, \dot{q}_i^*, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} L(q_i, \dot{q}_i, t) = 0 \quad (55)$$

Da wiederum die Invarianzbedingung erfüllt ist, gilt:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon_{ijk} n_j q_k = p_i \varepsilon_{ijk} n_j q_k = n_j \varepsilon_{ijk} q_k p_i = \\ &= \vec{n} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) = \vec{n} \cdot \vec{L} = \text{const.} \end{aligned} \quad (56)$$

Da  $\vec{n}$  beliebig war, gilt die Drehimpulserhaltung für beliebige Rotationen in zentralsymmetrischen Potentialen.

**4.4. Beispiel.** Für ein Teilchen im homogenen elektrischen Feld mit der Lagrangefunktion  $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + qE_0 \vec{r}$  kann man mittels Noethertheorem nun sehr einfach die Erhaltungsgrößen bestimmen

(1) Impuls:

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta_{ik} = m \dot{r}_i = \vec{p} = \text{const.}$$

(2) Energie:

$$Q = (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i) = \frac{m}{2} \dot{r}_i^2 + qE_0 r_i = E = \text{const.}$$

(3) Drehimpuls:

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \cdot \varepsilon_{ijk} n_j r_k = p_i \varepsilon_{ijk} n_j r_k = \vec{n} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{L} = \text{const.}$$

(Das homogene elektrische Feld ist ein zentralsymmetrisches Potential!)

**4.5. Erweitertes Noethertheorem.** Wie zuvor schon erläutert, ändert sich  $\delta S$  nicht, wenn die totale Zeitableitung einer Funktion  $f(q, t)$  zu  $L$  addiert wird. Die Invarianzbedingung lautet dann:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^* \right) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (57)$$

Damit lautet das *erweiterte Noethertheorem* folgendermaßen:

$$Q = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \phi - f(q, t) = \text{const.} \quad (58)$$

**4.6. Schwerpunkterhaltung mit Noethertheorem.** Sucht man die zugehörige Erhaltungsgröße zu einem System aus Massenpunkten mit der Transformation

$$x^* = x + \epsilon t, \quad y^* = y, \quad z^* = z, \quad t^* = t \quad (59)$$

so ergibt sich für ein abgeschlossenes System aus N Massenpunkten folgende Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu}^2 - \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N U_{\nu\mu} (|\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}|) \quad (60)$$

Mit 3N kartesischen Koordinaten  $x_n$  dargestellt und nach Auswertung der Invarianzbedingungen des erweiterten Noethertheorems, erhält man:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( \dots, |\vec{r}_\nu^* - \vec{r}_\mu^*|, \dots, \frac{dx_{3\nu-2}^*}{dt^*}, \frac{dx_{3\nu-1}^*}{dt^*}, \frac{dx_{3\nu}^*}{dt^*}, \dots \right) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} \\
&= \left[ \frac{d}{d\epsilon} L \left( \dots, |\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|, \dots, \dot{x}_{3\nu-2} + \epsilon, \dot{x}_{3\nu-1}, \dot{x}_{3\nu}, \dots \right) \right]_{\epsilon=0} \\
&= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{3\nu-2}} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{x}_{3\nu-2} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{r}_\nu \cdot \vec{e}_1 = \frac{d}{dt} M \vec{R} \cdot \vec{e}_1 \quad (61)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde wieder die Schwerpunktskoordinate  $\vec{R} = \sum_{\nu} m_\nu \vec{r}_\nu / M$  eingeführt. Man sieht, dass die Invarianzbedingung mit der Funktion  $f = M \vec{R} \cdot \vec{e}_1$  erfüllt ist. Daraus folgt mit dem erweiterten Noethertheorem die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{3\nu-2}} \psi_{3\nu-2} - f(x, t) = M(\dot{\vec{R}}t - \vec{R}) \cdot \vec{e}_1 = \text{const.} \quad (62)$$

Die Symmetrie gilt in gleicher Weise für eine spezielle Galileitransformation in y- und z-Richtung. Daher gilt

$$\dot{\vec{R}}t - \vec{R} = \text{const.} \quad (63)$$

Daraus folgt die Erhaltung des Schwerpunkts.

### Zusammenfassung

Abgeschlossene System sind invariant unter der 10-parametrigen Gruppe der Galileitransformationen. Daraus ergeben sich 10 Erhaltungsgrößen:

- (1) Energie  $E$
- (2) Impuls  $\vec{P}$  (3 Größen)
- (3) Drehimpuls  $\vec{L}$  (3 Größen)
- (4) Schwerpunkt  $\vec{R} - \dot{\vec{R}}t$  (3 Größen)



# Symmetrien in der Quantenmechanik

## Quantenmechanik

Auch in der Quantenmechanik<sup>5</sup> können Erhaltungsgrößen aus Symmetrien identifiziert werden. Allerdings ist hier ein neuer Formalismus notwendig, da die Gesetze der klassischen Physik nur mehr in Grenzfällen zutreffen.

In der Quantenmechanik können nur statistische Aussagen gemacht werden. Befindet sich also ein Objekt in einem Zustand, so meint man damit die Gesamtheit identisch präparierter Objekte. Der physikalische Zustand  $a$  enthält die maximal mögliche Information eines Kollektives und wird im Allgemeinen durch eine Messung verändert.

Ein physikalischer Zustand  $\psi$  zur Zeit  $t$  entspricht einem Zustandsvektor  $|\psi(t)\rangle \in H$  in einem komplexen Vektorraum, dem Hilbertraum. Einerseits können Quantenobjekte im Bra-/Ket - Formalismus, wie eben, oder auch mit Hilfe der Wellenfunktion geschrieben werden  $\psi(\vec{r}, t) \in H$ . Beide Darstellungen der Quantenobjekte sind gleichwertig und finden je nach Einfachheit, Übersichtlichkeit und betrachteter physikalischer Eigenschaft der Rechnung Verwendung.

Will man nun die Veränderung eines physikalischen Zustandes beschreiben, so braucht man dazu Operatoren. Jeder Observablen  $A$  entspricht in der Quantenmechanik ein linear, hermitescher Operator  $\hat{A}$ , der auf die Zustände im Hilbertraum wirkt.

$$\psi' = \hat{U}\psi$$

$$\psi' = \hat{U}\psi \quad (I)$$

wobei  $\psi'$  die veränderte Wellenfunktion beschreibt.

Damit die neuen (veränderten) Quantenobjekte auch physikalisch brauchbar sind, müssen die Operatoren gewisse Eigenschaften erfüllen:

(1) *Unitarität*: ein Operator ist unitär, wenn gilt:

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} \Rightarrow \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1} \quad (II)$$

---

<sup>5</sup>Vgl. im folgenden Abschnitt vorallem [Greiner 5], mit Ergänzungen von [Ecker] und [Frauenfelder/Henley]

Das garantiert die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit.

(2) *Hermitizität*: ein Operator ist hermitisch, wenn gilt:

$$\hat{U} \text{ ist unitär und } \hat{U} = \hat{U}^\dagger = U^{-1} \quad (III)$$

Das garantiert reelle Eigenwerte, also "realistische Ergebnisse".

Die allgemeine Formulierung der Unitarität (bzw. auch bei der Hermitizität) wäre  $\hat{U}^T = \hat{U}^{-1*}$ , also der transponierte Operator ist gleich dem inversen. Da in der Quantenmechanik vorwiegend komplexe Operatoren verwendet werden, muss der transponierte Operator auch noch komplex-konjugiert werden, was mit dem Dagger-Zeichen  $\dagger = T + *$  angedeutet wird. Im Falle eines hermiteschen Operators spricht man deshalb auch von einem selbst-adjungierten Operator.

Die physikalisch möglichen Werte der Observablen sind durch die Eigenwerte von  $\hat{A}$  gegeben. Weiters gilt das Superpositionsprinzip, welches besagt, dass jeder Zustand nach Eigenzuständen jedes beliebigen hermiteschen Operators  $\hat{A}$  entwickelt werden kann:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) |\phi_m\rangle \quad (IV)$$

Die komplexe Zahl  $c_m(t)$  drückt die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür aus, dass sich das System im Zustand  $\phi_m$  befindet.

Um die Zeitentwicklung zu beschreiben, tritt in der Quantenmechanik anstelle der Lagrangen-Bewegungsgleichungen die *zeitabhängige Schrödingergleichung*:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (V)$$

Für zeitunabhängigen Hamiltonoperator  $\hat{H}$  kann aus Gleichung (V) mittels Separationsansatzes ( $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})\chi(t)$ ) und Trennung der Variablen die *zeitunabhängige Schrödingergleichung* ermittelt werden:

$$\hat{H}\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}) \quad (VI)$$

Hierbei handelt es sich um eine Eigenwertgleichung, wobei die Werte für die Energie die Eigenwerte des Hamiltonoperators sind (die Lösung  $\psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(\vec{r})$  der Differentialgleichung erfüllt die Eigenwertgleichung).

Weiters gilt für zwei Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$ , die linear abhängige Eigenvektoren haben, dass sie die Vertauschungsrelation erfüllen.



$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A} = 0 \quad (VII)$$

Man sagt, die beiden Operatoren kommutieren. Damit können beide Observablen gleichzeitig gemessen werden. Im Falle der Operatoren für Impuls und Ort beispielsweise, erfüllt der Kommutator die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{P}_x, \hat{Q}_y] := \hat{P}_x \hat{Q}_y - \hat{Q}_y \hat{P}_x = i\hbar \delta_{x,y} \quad (VIII)$$

Diese Gleichung drückt nichts anderes als die Heisenbergsche Unschärferelation aus und bedeutet, dass Ort und Impuls nicht gleichzeitig beliebig scharf bestimmbar sind.

### Von Symmetrien zu Erhaltungsgrößen

Um in der Quantenmechanik überhaupt von Symmetrien sprechen zu können, verwendet man einen allgemeineren Symmetriebegriff, der in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts von Wigner eingeführt wurde. Zunächst definierte Wigner zu jedem physikalischen Zustand  $\psi$  einen zugehörigen *Strahl*  $\tilde{\psi}$  der durch folgende Definition gegeben ist:

$$\tilde{\psi} := \{\lambda\psi : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\} \text{ wobei } \|\psi\| = 1 \quad (IX)$$

Die *Definition der Symmetrie* ist nach Wigner durch eine bijektive Abbildung  $\tilde{\psi} \mapsto \tilde{\psi}'$  für  $\psi \in \tilde{\psi}$ ,  $\phi \in \tilde{\phi}$ ,  $\phi' \in \tilde{\phi}'$  und  $\psi' \in \tilde{\psi}'$  gegeben, so dass:

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = |\langle \psi' | \phi' \rangle|^2 \quad (X)$$

Mit dieser Definition folgert Wigner den Satz, dass *jede Symmetrie durch einen unitären oder antiunitären Operator  $\hat{U}$  gegeben ist*:

$$\tilde{\psi}' = \{e^{i\Theta} \hat{U} \psi : \Theta \in \mathbb{R}\} \quad (XI)$$

dabei ist  $\psi \in \tilde{\psi}$  und  $\hat{U}$  entweder:

- (1) unitär:  $\hat{U}$  ist linear,  $\hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{1}$
- (2) antiunitär:  $\hat{U}$  ist antilinear, d.h.
 
$$\begin{aligned} \hat{U}(\psi + \phi) &= \hat{U}\psi + \hat{U}\phi \\ \hat{U}(\lambda\psi) &= \lambda^* \hat{U}(\psi) \\ \langle \hat{U}\psi | \hat{U}\phi \rangle &= \langle \psi | \phi \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\hat{U}\hat{A}\hat{U}' =: \hat{A}'$  und  $\psi' := \hat{U}\psi$  ist und  $\langle \psi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{A}' \psi' \rangle$ .

Jeder Symmetrie entspricht also ein unitärer (oder antiunitärer) Operator  $\hat{U}$ , der als Symmetrieeoperator bezeichnet wird, wenn der die Schrödingergleichung erfüllt, was nichts anderes bedeutet, als dass der Symmetrieeoperator nichts am physikalischen Zustand ändert, also dass der Zustand forminvariant ist:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d(\hat{U}\psi)}{dt} &= \hat{H}\hat{U}\psi \\ \Rightarrow \\ i\hbar \frac{d\psi}{dt} &= \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U}\psi \end{aligned}$$

Vergleicht man nun mit der ursprünglichen Schrödingergleichung  $i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi$ , so kann  $\hat{U}$  nur dann ein Symmetrieeoperator sein, wenn er mit dem Hamiltonoperator kommutiert:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U} \\ \hat{H}\hat{U} - \hat{U}\hat{H} &\equiv [\hat{H}, \hat{U}] = 0 \end{aligned}$$

Wenn nun  $\hat{H}$  und  $\hat{U}$  miteinander kommutieren, so können die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators so gewählt werden, dass sie auch Eigenfunktionen von  $\hat{U}$  sind.

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi &= E\psi \\ \hat{U}\psi &= u\psi \quad (XII) \end{aligned}$$

Jede Observable  $A$  kann nun durch einen Operator  $\hat{A}$  dargestellt werden. Da es sich um eine physikalische Größe handelt, müssen die Eigenwerte reell sein und damit  $\hat{A}$  hermitisch. Die Observable  $\hat{A}$  ist die zu  $\hat{U}$  gehörige Erzeugende, weshalb man schreiben kann:

$$\hat{U} = e^{i\epsilon\hat{A}} \quad (XIII)$$

wobei  $\epsilon$  ein reeller Parameter ist.

Mittels Reihenentwicklung  $e^{i\epsilon\hat{A}} = \mathbb{1} + i\epsilon\hat{A} + \dots$  kann daraus gezeigt werden, dass die Erzeugende  $\hat{A}$  ebenfalls mit dem Hamiltonoperator kommutiert und damit sind ihre Eigenwerte Erhaltungsgrößen:

$$\boxed{[\hat{H}, \hat{A}] = 0 \Rightarrow \text{Eigenwerte von } \hat{A} \text{ sind Erhaltungsgrößen}} \quad (XIV)$$

Mit diesen Grundlagen ist nun auch eine Formulierung von bestimmten Symmetrien und Erhaltungssätze in der Quantenmechanik möglich.

### Raumverschiebung in der Quantenmechanik

Wie in der klassischen Mechanik kann auch in der Quantenmechanik die Translation betrachtet werden (siehe Abb. 1).

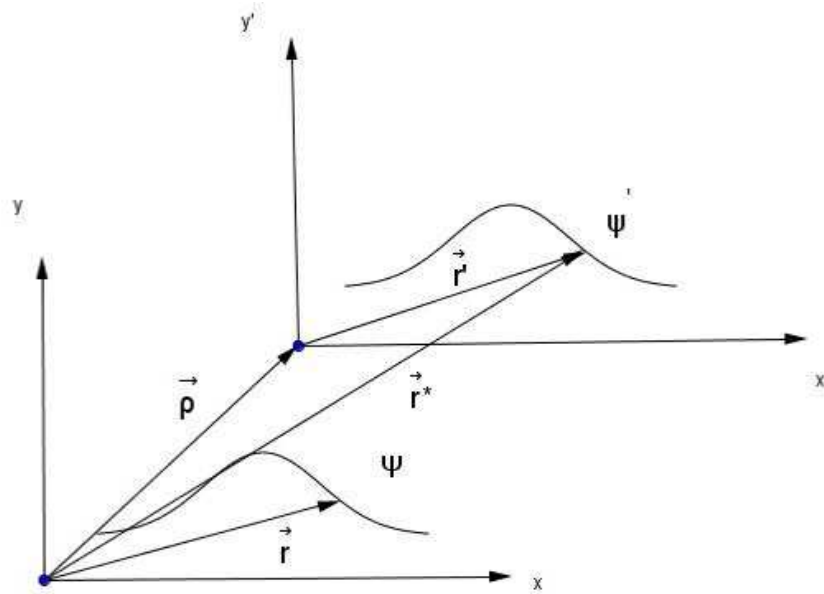


ABBILDUNG 2. Translation: Verschiebung der Wellenfunktion

Für die neuen Zustandsfunktion  $\psi'$ , die durch räumliche Verschiebung entsteht, gilt: Her

$$\psi(\vec{r}' - \vec{\rho}, t) = \psi'(\vec{r}', t) \quad (1)$$

Da bei der Verschiebung des Zustands im Ortsraum seine Norm unverändert bleibt und damit die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt, muss der zugehörige räumliche Verschiebungsoperator  $\hat{U}_r(\vec{\rho})$  unitär sein. Somit kann der verschobene Zustand auch folgendermaßen angeschrieben werden (wobei aus Übersichtlichkeit die Zeitkomponente nicht angeschrieben wird, da sie für die Translation irrelevant ist):

$$\psi'(\vec{r}') = \hat{U}_r(\vec{\rho})\psi(\vec{r}') \quad (2a)$$

Mit (1) kombiniert ergibt das:

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{\rho}) = \hat{U}_r(\vec{\rho})\psi(\vec{r}) \quad (2b)$$

Die Transformation (Eichtransformation) im Hilbertraum kann folgendermaßen beschrieben werden (siehe Gleichung XIV):

$$\psi'(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}}\psi(\vec{r}, t) \quad (3)$$

Für einen beliebigen Verschiebungsvektor  $\vec{\rho}$  erhält man aus  $\psi'(\vec{r} - \vec{\rho})$  durch dreidimensionale Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r} - \vec{\rho}) &= \psi(x - \rho_1, y - \rho_2, z - \rho_3) = \psi(x, y, z) - \vec{\rho} \vec{\nabla} \psi + \frac{\vec{\rho}^2}{2!} \vec{\nabla}^2 \psi - \dots = \\ &= e^{-\vec{\rho} \vec{\nabla}} \psi(x, y, z) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\rho} \vec{p}} \psi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei wurde der Impulsoperator  $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$  eingeführt.

Vergleicht man Gleichung (2b) nun mit Gleichung (4), so lautet der Verschiebungsoperator

$$\hat{U}_r(\vec{\rho}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\rho} \vec{p}} \quad (5)$$

Die zeitliche Änderung des Zustandes wird in der Quantenmechanik durch die zeitabhängige Schrödingergleichung beschrieben (jetzt ist die Zeitkomponente wieder wichtig):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (6)$$

Um eine Invarianzbedingung herleiten zu können, müssen nun die Bedingungen gefunden werden, unter welchen beide Zustände (also der ursprüngliche und der räumlich verschobene) derselben Schrödingergleichung genügen (analog zu den Lagrange-Gleichungen in der klassischen Mechanik, siehe Kapitel → Lagrangeformalismus und Hamiltonfunktion):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_r(\vec{\rho}) \psi(\vec{r}, t) = \hat{U}_r(\vec{\rho}) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{U}_r(\vec{\rho}) \hat{H} \psi(\vec{r}, t) = \hat{U}_r(\vec{\rho}) \hat{H} \hat{U}_r^{-1}(\vec{\rho}) \psi'(\vec{r}, t) = \\
 &= \hat{U}_r(\vec{\rho}) \hat{H} \hat{U}_r^\dagger(\vec{\rho}) \psi'(\vec{r}, t) \quad (7)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Unitarität von  $\hat{U}_r = \hat{U}_r^{-1}$  benutzt. Die Zustände  $\psi$  und  $\psi'$  erfüllen nur dann dieselbe Schrödingergleichung, wenn gilt:

$$\hat{U}_r(\vec{\rho}) \hat{H} \hat{U}_r^\dagger(\vec{\rho}) = \hat{H}$$

oder wegen der Unitarität:

$$\hat{U}_r(\vec{\rho}) \hat{H} = \hat{H} \hat{U}_r(\vec{\rho}) \quad (8)$$

Das heißt: Der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  und der Verschiebungsoperator  $\hat{U}_r(\vec{\rho})$  müssen kommutieren:

$$\left[ \hat{H}, \hat{U}_r(\vec{\rho}) \right] = 0 \quad (9a)$$

Da  $\vec{\rho}$  ein beliebiger Vektor ist, ist das gleichbedeutend mit:

$$\left[ \hat{H}, e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\rho} \cdot \vec{p}} \right] = 0 \quad (9b)$$

Wegen der Reihenentwicklung  $e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\rho} \cdot \vec{p}} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \vec{\rho} \cdot \vec{p} + \dots$  und weil jeder einzelne Summand mit dem Hamiltonoperator kommutiert, folgt daraus:

$$\boxed{\left[ \hat{H}, \vec{p} \right] = 0 \Rightarrow \text{Impulserhaltung}} \quad (9c)$$

Das heißt: Der Hamiltonoperator und der Impulsoperator kommutieren, weshalb der Impuls  $\vec{p}$  eine Konstante der Bewegung ist. Außerdem folgt aus der Vertauschbarkeit auch, dass  $\hat{H}$  und  $\vec{p}$  gleichzeitig diagonalisiert werden können, so dass die einzelnen Zustände sowohl für die Energie, als auch für den Impuls feste Eigenwerte besitzen. Man sieht, dass die Forderung nach der Homogenität des Raums gleichbedeutend ist mit der Forderung, dass jede beliebige räumlich verschobene Wellenfunktion auch wieder dieselbe Schrödingergleichung erfüllt. Diese Symmetrie der Naturgesetze gegenüber Raumverschiebungen impliziert den Impulserhaltungssatz. Die Zustände sind durch konstante Energie und konstanten Impuls charakterisiert. Solche Systeme heißen invariant gegenüber Raumverschiebungen. Wirkt jedoch eine Kraft,

geht die Symmetrie verloren. Verschiebt man die Wellenfunktion, so befindet sie sich vielleicht nicht mehr innerhalb des Potentials und die Eigenfunktionen sind deshalb auch nicht mehr translationsinvariant. (siehe Abb. 2)

$$[\hat{H}, \hat{p}] = [\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}, \hat{p}] = [\hat{V}, \hat{p}] \neq 0$$

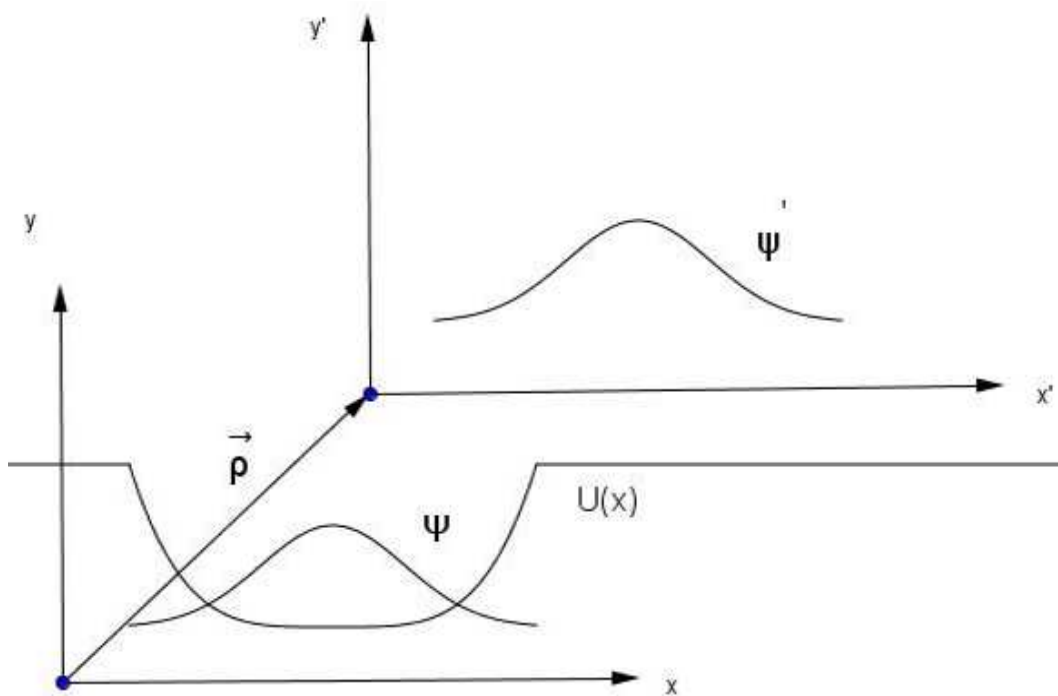


ABBILDUNG 3. Die Symmetrie bei einem vorhandenen Potential ist gegen Raumverschiebung nicht invariant

### Zeitverschiebung in der Quantenmechanik

In Analogie zur räumlichen Verschiebung, kann der zeitlich verschobene Zustand  $\psi'(\vec{r}, t)$  folgendermaßen angeschrieben werden

$$\psi'(\vec{r}, t + \tau) = \psi(\vec{r}, t) \quad (10)$$

Hat die ursprüngliche Wellenfunktion ihr Maximum bei  $t = t_0$ , dann hat die zeitverschobene Wellenfunktion ihr Maximum bei  $t = t_0 + \tau$ . (siehe Abb.3)

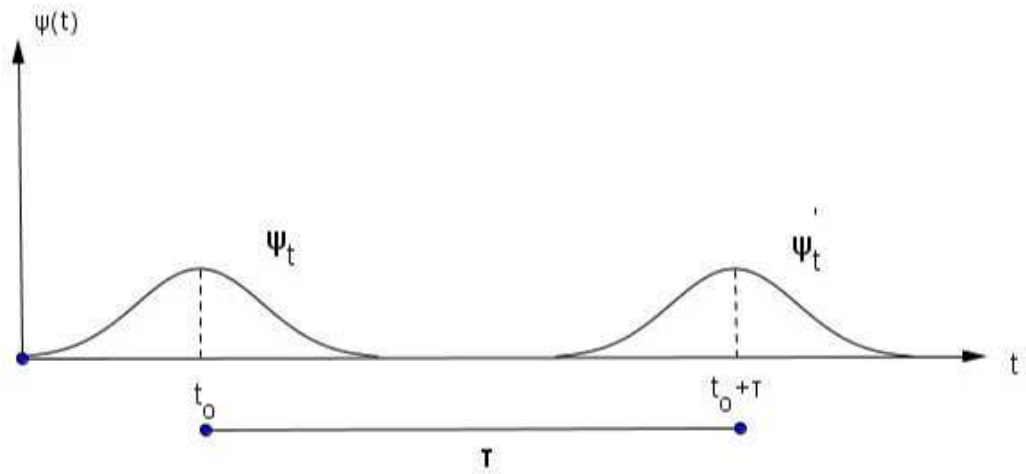


ABBILDUNG 4. Zeitliche Verschiebung der Wellenfunktion

Die Verbindung zwischen zeitverschobenem und ursprünglichem Zustand wird in Analogie zu (3a) durch den Zeitverschiebungsoperator  $\hat{U}_t(\tau)$  ausgedrückt

$$\psi'(\vec{r}, t) = \hat{U}_t(\tau)\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t - \tau) \quad (11)$$

Die Taylorentwicklung von  $\psi(\vec{r}, t - \tau)$  ergibt

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t - \tau) &= \psi(\vec{r}, t) + \frac{(-\tau)}{1!} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) + \frac{(-\tau)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t) + \dots \\ &= \left[ \hat{1} + \frac{-\tau}{1!} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(-\tau)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right] \psi(\vec{r}, t) \\ &= e^{-\tau \frac{\partial}{\partial t}} \psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (12)$$

Daraus folgt

$$\hat{U}_t(\tau) = e^{-\tau \frac{\partial}{\partial t}} = e^{\frac{i}{\hbar} \tau \hat{E}} \quad (13a)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}} \quad (13b)$$

wobei der Energieoperator zu  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  ( $= \hat{H}$ , wenn zeitunabhängig) eingeführt wurde. Da  $\hat{E}$  hermitisch ist, ist  $\hat{U}_t(\tau)$  unitär:

$$\hat{U}_t^\dagger(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{E}^\dagger} = e^{-\frac{i}{\hbar} \tau \hat{E}} = \hat{U}_t^{-1}(\tau)$$

Die Form (13b) kann nur dann verwendet werden, wenn der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  zeitunabhängig ist. Setzt man in die Schrödingergleichung ein, so erhält man zwar

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi$$

jedoch gilt für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi \right) = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \psi \\ &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \hat{H}^2 \psi + \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \psi \end{aligned}$$

Hier erkennt man, dass die höheren Ableitungen nach der Zeit nur dann durch Potenzen von  $\hat{H}$  ersetzbar sind, wenn  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$ . Falls also  $\hat{H}$  zeitunabhängig ist und somit (13b) gilt, dann folgt auch

$$[\hat{H}, \hat{U}_t(\tau)] = [\hat{H}, e^{\frac{i}{\hbar} \tau \hat{H}}] = 0 \quad (14)$$

Das ist wiederum die analoge Relation zur räumlichen Verschiebung. Also, dass auch der zeitverschobene Zustand wieder die Schrödingergleichung erfüllt: Aus

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (15)$$

folgt

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\vec{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_t(\tau) \psi(\vec{r}, t) = \hat{U}_t(\tau) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) \\ &= \hat{U}_t(\tau) \hat{H} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \hat{U}_t(\tau) \psi(\vec{r}, t) \\ &= \hat{H} \psi'(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (16a)$$



Das heißt also, dass die Annahme, dass der zeitverschobene Zustand die Schrödingergleichung erfüllt, (15) impliziert und umgekehrt. Die Annahme (14), dass der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  mit dem Zeitverschiebungsoperator  $\hat{U}_t(\tau)$  kommutiert, hat zur Folge, dass der zeitverschobene Zustand  $\psi'(\vec{r}, t)$  auch wieder die Schrödingergleichung erfüllt. Das System ist dann invariant unter Zeitverschiebung, was gleichbedeutend mit der Konstanz des Hamiltonoperators ist. Damit gilt der Energieerhaltungssatz bei zeitunabhängigem Hamiltonoperator.

$$\boxed{[\hat{H}, e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{E}}] = [\hat{H}, e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}}] = 0 \Rightarrow \text{Energieerhaltung}} \quad (16b)$$

Ist  $\hat{H}$  explizit zeitabhängig, erfüllt der zeitverschobene Zustand nicht mehr die Schrödingergleichung.

$$[\hat{H}, e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{E}}] \neq 0 \text{ für zeitabhängige Hamiltonfunktion} \quad (16c)$$

### Isotropie des Raums in der Quantenmechanik

Isotropie des Raums bedeutet Invarianz der Naturgesetze gegenüber Raumdrehungen. Die Drehung der Wellenfunktion wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\psi'(\vec{r}, t) = \psi(\hat{R}^{-1}\vec{r}, t) \quad (17a)$$

bzw.

$$\psi'(\hat{R}\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \quad (17b)$$

wobei  $\hat{R}$  die Rotationsmatrix beschreibt, die beispielsweise so parametrisiert werden kann:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi_z & \delta\phi_y \\ \delta\phi_z & 1 & -\delta\phi_x \\ -\delta\phi_y & \delta\phi_x & 1 \end{pmatrix}$$

und  $\delta\vec{\phi} = (\delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z)$  einen infinitesimalen Drehvektor darstellt.

Da für den Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Wellenfunktion und der gedrehten gelten muss, dass

$$\psi'(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\delta\vec{\phi})\psi(\vec{r}, t) \quad (18)$$

ist, kann man den Drehoperator  $\hat{U}_R(\delta\vec{\phi})$  für infinitesimale Drehungen ermitteln (genauer dazu, siehe Greiner 5, Seite 48 f)

$$\hat{U}_R(\delta \vec{\phi}) \simeq \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{L}} \quad (19)$$

wobei  $\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$  der Drehimpulsoperator ist. Mit diesen Überlegungen für infinitesimale Drehungen lässt sich mit Hilfe der Differentialrechnung für die einzelnen Komponenten zeigen (siehe dafür Greiner 5, Seite 50), dass

$$\frac{\partial \hat{U}_R(\vec{\phi})}{\partial \phi_i} = -\frac{i}{\hbar} \hat{L}_i \hat{U}_R(\vec{\phi}) \quad (20)$$

Integration dieser Gleichung mit der Randbedingung  $\hat{U}_R(0) = \hat{1}$  ergibt den allgemeinen Drehoperator für endliche Rotationen

$$\hat{U}_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{L}}} \quad (21)$$

Der Drehoperator ist unitär, denn es gilt:

$$\hat{U}_R^{-1}(\vec{\phi}) = \hat{U}_R(-\vec{\phi}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{L}}}$$

und

$$\hat{U}_R^\dagger(\vec{\phi}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{L}}^\dagger} = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{L}}}$$

weil  $\hat{\vec{L}}$  hermitisch ist. Daher folgt

$$\hat{U}_R^\dagger(\vec{\phi}) = \hat{U}_R^{-1}(\vec{\phi}) \quad (22)$$

Die drei Operatoren  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  heißen *Generatoren (Erzeugende)* der Rotation und kommutieren untereinander nicht.

Die Rotationen können durch drei unabhängige Parameter (drei Komponenten des Drehvektors) beschrieben werden. Sie bilden eine dreiparametrische kontinuierlich verbundene Gruppe, die  $SO(3)$  (*Rotationsgruppe*) genannt wird. Dies soll eine orthogonale Gruppe in 3 Dimensionen andeuten, die alle reellen orthonormalen  $3 \times 3$  Matrizen, deren Determinanten +1 ist, umfasst. Die  $SO(3)$  ist ein Musterbeispiel einer *Lie-Gruppe*, unter welcher man eine kontinuierliche Gruppe, deren Elemente differenzierbare Funktionen der Parameter sind, versteht.

Um nun die Isotropie des Raums zu zeigen, müssen der gedrehte und der ursprüngliche Zustand dieselbe Schrödingergleichung erfüllen

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi'(\vec{r}, t)}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial \hat{U}_R(\vec{\phi}) \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ &= \hat{U}_R(\vec{\phi}) (i\hbar) \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{U}_R(\vec{\phi}) \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

$$= \hat{U}_R(\vec{\phi}) \hat{H} \hat{U}_R^{-1}(\vec{\phi}) \psi'(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi'(\vec{r}, t) \quad (23)$$

Damit das letzte Gleichheitszeichen gilt, folgt für beliebige Drehvektoren  $\vec{\phi}$

$$\hat{U}_R(\vec{\phi}) \hat{H} \hat{U}_R^{-1}(\vec{\phi}) = \hat{H} \quad (24)$$

oder anders geschrieben

$$[\hat{U}_R(\vec{\phi}), \hat{H}] = 0 \quad (25)$$

und weil der Drehvektor beliebig war und man die Exponentialfunktion durch ihre Reihenentwicklung darstellen kann:

$$\boxed{[\hat{\vec{L}}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow \text{Drehimpulserhaltung}} \quad (26)$$

Diese drei Gleichungen (24), (25) und (26) sind alle äquivalent und drücken denselben Sachverhalt aus, nämlich die Erhaltung des Drehimpulses  $\hat{\vec{L}}$ . Die Drehimpulserhaltung muss, im Gegensatz zur Translationsinvarianz, durch eine äußere Kraft nicht unbedingt gebrochen werden. Liegt ein sphärisches Kraftfeld vor, also ein in alle Richtungen gleich beschaffenes Feld, so bleibt der Drehimpuls erhalten.

**Vektorfelder, Gesamtdrehimpuls und Spin.** Der soeben hergeleitete Drehoperator  $\hat{U}_R$  gilt für alle Teilchen in Skalarfeldern (eine Funktion, die jedem Raumpunkt eine Zahl zuordnet), wenn ein zentralsymmetrisches Potential vorliegt.

Betrachtet man jedoch die Transformation eines Vektorfeldes unter Rotation, wie es zur Beschreibung von Photonen oder Vektormesonen der Fall ist, so gestaltet sich die Suche nach dem Drehoperator etwas schwieriger. Die Wellenfunktion  $\vec{\psi}$  ändert bei dieser Transformation nämlich nicht nur die x-Koordinate, sondern auch die Richtung und das muss in den Drehoperator einfließen. Die drei Komponenten der Wellenfunktion können dabei als Vektor zusammengefasst werden. Allgemein kann geschrieben werden:

$$\vec{\psi}'(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\phi}) \vec{\psi}(\vec{r}, t) \quad (27)$$

Der Unterschied zum Skalarfeld wird in der folgenden Transformation ausgedrückt:

$$\vec{\psi}'(\vec{r}', t) = \hat{R} \vec{\psi}(\vec{r}, t)$$

oder

$$\vec{\psi}'(\hat{R} \vec{r}, t) = \hat{R} \vec{\psi}(\vec{r}, t)$$

oder mit Gleichung (27):

$$\vec{\psi}'(\vec{r}, t) = \hat{R} \vec{\psi}(\hat{R}^{-1} \vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\phi}) \vec{\psi}(\vec{r}, t) \quad (28)$$

Für kleine Drehungen  $\delta \vec{\phi}$  kann der Drehoperator  $\hat{U}_R(\delta \vec{\phi})$  folgendermaßen gefunden werden:

$$\begin{aligned} \hat{U}_R(\delta \vec{\phi}) \vec{\psi}(\vec{r}, t) &= \hat{R} \vec{\psi}(\hat{R}^{-1} \vec{r}, t) \approx \vec{\psi}(\hat{R}^{-1} \vec{r}, t) + \delta \vec{\phi} \times \vec{\psi}(\hat{R}^{-1} \vec{r}, t) \\ &\simeq \vec{\psi}(\vec{r} - \delta \vec{\phi} \times \vec{r}, t) + \delta \vec{\phi} \times \underbrace{\vec{\psi}(\vec{r} - \delta \vec{\phi} \times \vec{r}, t)}_{\approx 0} \\ &\simeq \vec{\psi}(\vec{r}, t) - \frac{i}{\hbar} (\delta \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{L}}) \vec{\psi}(\vec{r}, t) + \delta \vec{\phi} \times \vec{\psi}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (29)$$

Der letzte Term kann auch noch umgeformt und vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \delta \vec{\phi} \times \vec{\psi}(\vec{r}, t) &= \varepsilon_{ijk} \delta \phi_j \psi_k = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \delta \phi_j (\hat{S}_j)_{ik} \psi_k = -\frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot (\hat{\vec{S}})_{ik} \psi_k \end{aligned} \quad (30)$$

mit  $(\hat{S}_j)_{ik} = i\hbar \epsilon_{ijk}$ .  
d.h.

$$(\hat{S}_1)_{ik} = i\hbar \varepsilon_{i1k} = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (31a)$$

$$(\hat{S}_2)_{ik} = i\hbar \varepsilon_{i2k} = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31b)$$

$$(\hat{S}_3)_{ik} = i\hbar \varepsilon_{i3k} = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31c)$$

Das kann zum Vektor  $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$  zusammengefasst werden und es ergibt sich

$$\hat{U}_R(\delta \vec{\phi}) \vec{\psi}(\vec{r}, t) \simeq [\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}})] \vec{\psi}(\vec{r}, t)$$

Also gilt für den Drehoperator für infinitesimale Drehungen:

$$\hat{U}_R(\delta \vec{\phi}) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}) \quad (32)$$

wobei  $\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{P}}$  ein Differentialoperator ist und  $\hat{\vec{S}}$  ein Matrixoperator (der nicht mischt, sondern der sich nur auf die Komponenten von  $\vec{\psi}$  auswirkt) ist. Daraus folgt

$$[\hat{L}_i, \hat{S}_k] = 0 \quad (33)$$

Um nun den Drehoperator  $\hat{U}_R(\vec{\phi})$  für endliche Drehungen herleiten zu können, zerlegt man den Winkel  $\vec{\phi}$  in  $N$  kleine Drehwinkel:  $\delta\vec{\phi} = \vec{\phi} \frac{1}{N}$ . Der Drehoperator für endliche Drehungen ergibt sich dann aus  $N$  hintereinander auszuführenden kleinen Drehungen.

$$\begin{aligned} \hat{U}_R(\vec{\phi}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} [1 - \frac{i}{\hbar} (\frac{\vec{\phi}}{N} (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}))]^N \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}})} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \hat{\vec{J}}} \end{aligned} \quad (34)$$

wobei  $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$  ist und  $\hat{J}_i$  die Generatoren der Drehung für Vektorfelder darstellen.

Es gilt:

$[\hat{\vec{J}}, \hat{\vec{H}}] = [\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}, \hat{\vec{H}}] = 0 \Rightarrow \text{Gesamtdrehimpulserhaltung bei Vektorfeldern}$

(35)

Der Gesamtdrehimpuls  $\hat{\vec{J}}$  ist beim Vektorfeld erhalten. Die Größe  $\hat{\vec{S}}$  wird als *innerer Drehimpuls* oder *Spin* bezeichnet. Sie ist eine wichtige Eigenschaft von Quantenteilchen, die kein klassisches Analogon hat.

Für Skalarfelder wurde bereits gezeigt, dass die Komponenten des Bahndrehimpulses die Vertauschungsrelationen erfüllen

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (36)$$

Auf Grund der Gleichungen (31) gilt das auch für die Spinkomponenten

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k \quad (37)$$

Das Gleiche gilt für die Komponenten des Gesamtdrehimpulses wegen Gleichung (33)

$$\begin{aligned} [\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= [\hat{L}_i + \hat{S}_i, \hat{L}_j + \hat{S}_j] = [\hat{L}_i, \hat{L}_j] + [\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \\ &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k + i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k \end{aligned} \quad (38)$$

Interessant ist vom soeben berechneten Vektorfeld noch der Betrag des Spins, da er zur Charakterisierung von Teilchen herangezogen wird.

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{S}}^2 &= \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2 = \\
&= (i\hbar)^2 \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(1+1)\hbar^2 \mathbf{1} \quad (39)
\end{aligned}$$

Der Betrag wurde hier schon in der Form  $S(S+1)$ , analog zum Bahndrehimpuls, geschrieben. Das bedeutet, dass Vektorfelder den Spin 1 tragen oder anders ausgedrückt:

*Vektorfelder beschreiben Spin 1 Teilchen.*

Wie oben bereits erwähnt, sind Photonen und Vektormesonen Teilchen mit Spin 1.

Im vorherigen Fall galt:

*Skalarfelder behandeln Teilchen mit Spin 0.*

Diese Erkenntnisse können jetzt dazu verwendet werden um bei einer vorliegenden Wellenfunktion den Spin der Teilchen zu ermitteln. Dazu studiert man die Transformationseigenschaften des Feldes unter Rotationen.

**Zweier-Spinorfeld und Gesamtdrehimpuls.** Um den Drehoperator für Zweier-Spinoren (Funktion, die jedem Raumpunkt einen zweidimensionalen Vektor zuordnet) herleiten zu können, muss die Vorgehensweise für die Drehung der skalaren Wellenfunktion und der Vektorwellenfunktion modifiziert werden, da sie der Antikommutator-Algebra (siehe Begriffslexikon) genügen. Der Zweier-Spinor wird mit  $\psi$  bezeichnet und steht für  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ . Für die Drehung schreibt man analog zu den zwei vorherigen Fällen:

$$\psi'(\vec{r}, t) = \hat{U}_R(\vec{\psi})\psi(\vec{r}, t) \quad (40)$$

Über den Operator  $\hat{U}_R$  ist zu wenig bekannt um ihn, wie in den beiden Fällen zuvor, direkt zu bestimmen. Deshalb verwendet man die unitäre Eigenschaft des Operators, die ja reelle Eigenwerte garantiert. Das bedeutet ja nichts anderes, als dass die Wahrscheinlichkeit das System im nicht gedrehten Zustand  $\psi$  zu finden gleich groß ist, wie die Wahrscheinlichkeit das System im gedrehten Zustand vorzufinden.

$$\int \psi^\dagger \psi d^3x = \int \psi'^\dagger \psi' d^3x = \int \psi^\dagger \hat{U}_R^\dagger(\vec{\phi}) \hat{U}_R(\vec{\phi}) \psi d^3x \quad (41)$$

wobei also

$$\hat{U}_R^\dagger(\vec{\phi}) \hat{U}_R(\vec{\phi}) = \mathbb{1}$$

Nun wird die skalare Dichte  $\psi^\dagger \psi$  so rotiert wie eine skalare Wellenfunktion:

$$\psi'^\dagger(\vec{r}') \psi'(\vec{r}') = \psi^\dagger(\hat{R}^{-1} \vec{r}') \psi(\hat{R}^{-1} \vec{r}') \quad (42)$$

Da die skalare Dichte wie eine skalare Wellenfunktion rotiert, ergibt sich der Bahndrehimpulsanteil zu:

$$\hat{U}_L(\vec{\psi}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{L}} \quad (43)$$

Weil jedoch zum gesamten Rotationsoperator  $\hat{U}_R(\vec{\phi})$  noch ein weiterer, vom Spin herrührender Anteil hinzukommt, schreibt man:

$$\hat{U}_R(\vec{\phi}) = \hat{U}_S(\vec{\phi}) \hat{U}_L(\vec{\phi}) \quad (44)$$

mit  $\hat{U}_S$  als koordinatenunabhängiger Operator, der wiederum unitär sein muss. Deshalb kann man den Ansatz, mit noch zu bestimmenden hermiteschen Vektoroperator  $\hat{\vec{a}}$ , wählen:

$$\hat{U}_S(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{a}}} \quad (45)$$

Unter Berücksichtigung der Pauli-Gleichung, die die Zeitentwicklung von Zweier-Spinoren beschreibt, und der Kommutatoreigenschaften der Pauli-Matrizen  $\sigma_n$  kann man den hermiteschen Vektoroperator  $\hat{\vec{a}}$  bestimmen:

$$\hat{a}_n = \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_n \quad (46)$$

und damit

$$\hat{U}_S(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{2} \vec{\phi} \cdot \hat{\vec{\sigma}}} \quad (47)$$

Führt man den Spinoperator  $\hat{\vec{s}} = \frac{1}{2} \hbar \hat{\vec{\sigma}}$  ein, so lässt sich der Gesamtdrehimpuls wieder als Summe des Bahndrehimpulses und des Spinoperators schreiben.

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s} \Rightarrow \text{Gesamtdrehimpulserhaltung bei Zweier-Spinoren}$

(48)

Zweier-Spinoren transformieren somit analog zu den skalaren Wellenfunktionen (Spin = 0) und den Vektorwellenfunktionen (Spin =  $1\hbar$ ) mit einem Spin von  $|\vec{s}| = \frac{1}{2}\hbar$ .

*Zweier – Spinorfelder beschreiben Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$*

### Entartung von Zuständen und Zeemaneffekt

**Die Entartung von Zuständen.** Von Entartung spricht man, wenn mehrere Zustände eines Systems dieselben Eigenwerte (hier im speziellen Fall, dieselbe Energie) haben.

Genügt der ursprüngliche Zustand  $\psi(\vec{r}, t)$  der stationären Schrödingergleichung genügen:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (49)$$

und kommutiert ein Operator  $\hat{S}$  mit  $\hat{H}$ , also

$$[\hat{H}, \hat{S}] = 0 \quad (50)$$

dann ist auch  $\hat{H}\psi$  ein Eigenzustand von  $\hat{H}$  mit demselben Eigenwert  $E$ , denn nach (49) ergibt sich

$$\hat{H}(\hat{S}\psi) = \hat{S}\hat{H}\psi = \hat{S}E\psi = E(\hat{S}\psi) \quad (51)$$

Sind die beiden Zustände  $\chi = \hat{S}\psi$  und  $\psi$  linear unabhängig von einander, dann ist der Eigenwert  $E$  entartet. Im Fall der Symmetrie gegenüber räumlichen Verschiebungen ist  $\hat{p}$  ein Operator, der mit dem Hamiltonoperator kommutiert. Daher wären alle Zustände, die aus einer (translationsinvarianten) ebenen Welle  $\psi$  mit dem Energie-Eigenwert  $E = \frac{\vec{p}_0^2}{2m}$  hervorgehen, energetisch entartet.

$$\vec{\chi} = \vec{\hat{p}}\psi(\vec{r}, t) = \vec{\hat{p}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\vec{r} - Et)} = \frac{\vec{p}_0}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\vec{r} - Et)} \quad (52)$$

Die Wellenfunktionen  $\chi$  sind jedoch in diesem Fall bis auf den Normierungsfaktor alle gleich (also linear abhängig). Deshalb liegt hier keine Entartung vor.

Betrachtet man statt der Translation jedoch die Drehung der Wellenfunktion um einen infinitesimalen Winkel  $\delta\phi$ , erhält man



$$\begin{aligned}
\chi &= \hat{U}_R(\delta \vec{\phi}) \psi(\vec{r}, t) \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot \vec{L}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{r} - Et)} \\
&= \left[ \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{r} - Et)} \\
&= \left[ \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \delta \vec{\phi} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}_0) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{r} - Et)} \\
&= \left[ \hat{1} + \frac{i}{\hbar} (\delta \vec{\phi} \times \vec{p}_0) \cdot \vec{r} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{r} - Et)} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar} (\delta \vec{\phi} \times \vec{p}_0) \cdot \vec{r}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{r} - Et)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} [(\vec{p}_0 + \delta \vec{\phi} \times \vec{p}_0) \cdot \vec{r} - Et]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} \quad (53)
\end{aligned}$$

wobei  $\vec{p} = \vec{p}_0 + \delta \vec{\phi} \times \vec{p}_0$  der gedrehte Impuls ist. Außerdem gilt, dass  $|\vec{p}| = |\vec{p}_0|$ . Die gedrehten Wellen sind linear unabhängig zur ursprünglichen Welle. Diese Wellen sind daher, falls  $\hat{U}_R(\delta \phi)$  mit dem Hamiltonoperator vertauscht und  $\psi(\vec{r}, t)$  ein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist, alle entartet. Das ist einleuchtend, denn die Energie eines Teilchens hängt nur vom Quadrat des Impulses und nicht von dessen Richtung ab.

Interessant sind diese Überlegungen also dann, wenn es zwei Operatoren  $\hat{S}$  und  $\hat{A}$  gibt, die zwar mit  $\hat{H}$  vertauschen, aber nicht miteinander. Ist dann  $\psi$  Eigenvektor von  $\hat{A}$  und  $\hat{H}$ , so ist  $\psi$  nicht Eigenvektor von  $\hat{S}$ , also  $\psi$  und  $\hat{S}\psi$  sind linear unabhängig. Im vorherigen Beispiel war das erfüllt:  $\hat{A}$  war der Impulsoperator und  $\hat{S}$  der Drehimpulsoperator.

**Symmetriebrechung durch ein magnetisches Feld - Der Zeemaneffekt.** Für ein System mit Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$ , magnetischem Moment  $\mu$ , gyromagnetischen Faktor  $g$  und Magnetfeld  $\vec{B}$  ergibt sich folgende Hamiltonfunktion:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{mag} = \hat{H}_0 - \frac{g\mu_0}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{B} \quad (53)$$

und es gilt für Systeme ohne Magnetfeld:

$$[\hat{H}_0, \vec{\hat{J}}] = 0 \quad (54)$$

Der Spin und der Hamiltonoperator kommutieren demnach, was bedeutet, dass sie dieselben Eigenfunktionen besitzen und damit die Generatoren ( $J_i$ ) dieselben Eigenwerte wie der Hamiltonoperator haben.

Vor dem Anlegen eines Magnetfeldes sind daher die Energieniveaus des Systems  $(2j+1)$ -fach entartet. Legt man nun ein magnetisches Feld an, so verändert sich der Hamiltonoperator laut Gleichung (53) und die beiden Operatoren kommutieren nicht mehr miteinander

$$[\hat{H}, \vec{\hat{J}}] = [\hat{H}_0 + \hat{H}_{mag}, \vec{\hat{J}}] \neq 0 \quad (55)$$

und die Zustände haben daher nicht mehr dieselbe Energie, sondern spalten sich in einzelne Zustände mit  $(2j+1)$  separaten Energiewerten auf. (siehe Abb. 4 mit  $j = \frac{3}{2}$ )

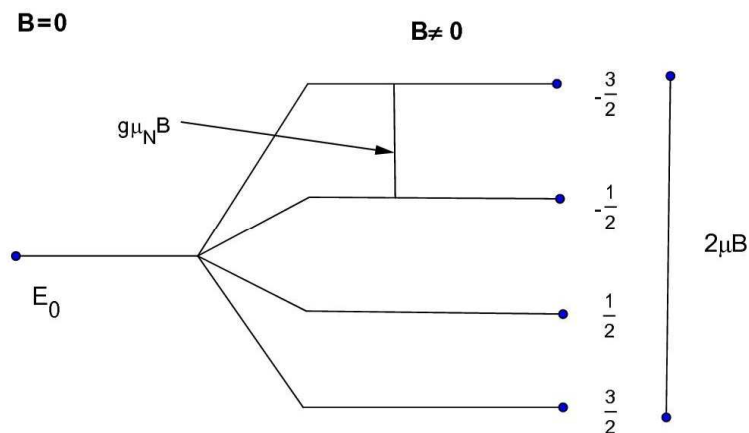


ABBILDUNG 5. Zeemaneffekt

Falls die z-Richtung auch der Richtung des magnetischen Feldes entspricht, gilt:

$$[\hat{H}_0 + \hat{H}_{mag}, \hat{J}_z] = 0 \quad (56)$$

Das bedeutet, dass in Richtung des magnetischen Feldes das System noch immer invariant unter Drehungen ist. Die vollständige Symmetrie ist jedoch gebrochen. Dieser Vorgang wird als Zeemaneffekt bezeichnet und kann leicht beobachtet werden.

Daraus erkennt man, dass es oft einfacher ist leicht gebrochene Symmetrien zu entdecken als exakte.

**Eigenschaften des Gesamtdrehimpulses.** Da in Systemen mit Zentralpotential der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, wird er zur Klassifizierung der Zustände herangezogen.

Das Quadrat des Gesamtdrehimpulses  $\vec{\hat{J}}^2$  vertauscht mit allen Komponenten. Also

$$[J_i, \vec{\hat{J}}^2] = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (57)$$

Der Satz der Operatoren  $J_x, J_y, J_z$  bestimmt den Vektoroperator  $\vec{\hat{J}}$  vollständig, jedoch eignet sich für algebraische Umwandlungen der Satz  $\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_z$  besser, wobei

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad (58a)$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad (58b)$$

Diese nicht hermiteschen Operatoren werden als *Stufenoperatoren* bezeichnet, weil sie bei der Anwendung auf die Eigenfunktion die Eigenwerte erniedrigen ( $\hat{J}_-$ ) bzw. erhöhen ( $\hat{J}_+$ ).

Da  $\vec{\hat{J}}^2$  mit seinen kartesischen Komponenten kommutiert (57), lässt sich zu einer Komponente (z.B.:  $J_z$ ) und  $\vec{\hat{J}}^2$  ein Satz gemeinsamer Eigenfunktionen finden mit den zugehörigen Eigenwerten  $j(j+1)$  und  $m$ .

$$\vec{\hat{J}}^2 \psi_{jm} = j(j+1) \psi_{jm} \quad (59a)$$

$$\hat{J}_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} \quad (59b)$$

Zum Drehimpulsoperator  $\vec{\hat{J}}^2$  gehören dann die Eigenwerte  $j(j+1)$ . Zu einem festen Wert der Quantenzahl  $j$  können die Eigenwerte  $m$  von  $2j+1$  verschiedene Werte annehmen, wobei  $m$  von  $-j$  bis  $+j$  läuft.

Das heißt, zu jedem Drehimpuls  $j$  gibt es  $2j + 1$  Zustände, die als *magnetische Quantenzahlen*  $m$  bezeichnet werden.

Da durch Anwendung der beiden Operatoren  $\hat{J}_+$  und  $\hat{J}_-$  auf die Eigenfunktionen der Operatoren  $\hat{J}^2$  und  $\hat{J}_z$  jeder der  $(2j + 1)$  Vektoren in jeden anderen Vektor übergeführt werden kann, spricht man von einem *invarianten Unterraum* (Menge von Zuständen, die sich bei der Anwendung irgendeines Operators der Gruppe reproduzieren) des Hilbertraums bzw. von einer *irreduziblen Darstellung* der Drehgruppe. Diese wird auch als *Multiplett* bezeichnet, die ohne Symmetriebrechung (hier am Beispiel des Zeemaneffekts) nicht erkennbar wäre.

### Diskrete Symmetrien

Bei allen bis jetzt betrachteten Symmetrien handelt es sich um so genannte *kontinuierliche Symmetrien*, welche zu einem *additiven Erhaltungssatz* führen. Das bedeutet, dass die Summe der Quantenzahlen in den Anfangszuständen gleich jener in den Endzuständen ist.

In der Quantenmechanik kennt man jedoch noch eine weitere Art der Symmetrien, so genannte *diskontinuierliche* bzw. *diskrete Symmetrien*. Diese lassen auf einen *multiplikativen Erhaltungssatz* schließen, in dem das Produkt von Quantenzahlen invariant ist.

Die Erhaltung der Parität und der Zeitumkehr gehören zu dieser Art Symmetrie.

### Parität

Unter einer Paritätsoperation  $P$  versteht man bildlich gesprochen eine Punktspiegelung. Damit ändert diese Operation für jeden echten (polaren) Vektor das Vorzeichen:

$$\hat{x} \rightarrow -\hat{x} \text{ und } \hat{p} \rightarrow -\hat{p} \quad (60)$$

Für axiale Vektoren (Pseudovektoren) gilt hingegen:

$$\hat{L} \rightarrow \hat{L} \quad (61)$$

Das ist leicht einzusehen, da  $\hat{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  ist. Weiters gilt auch für den Gesamtdrehimpuls  $\hat{J}$  und den Spin  $\hat{S}$ , dass sich beide wie axiale Vektoren verhalten und bei Anwendung des Paritätsoperators ihr Vorzeichen nicht ändern. Das soll im Folgenden genauer erläutert werden.

Wendet man den Paritätsoperator auf eine Wellenfunktion an, so kann

diese entweder unverändert bleiben (positive Parität) oder ihr Vorzeichen ändern (negative Parität).

Da eine Punktspiegelung für erste Überlegungen als Drehung um  $180^\circ$  aufgefasst werden kann, schreibt man analog zu den Rotationen:

$$\vec{r}' = \hat{R}_I \vec{r} = -\vec{r} \quad (62)$$

die Raumspiegelung ergibt sich jedoch nur, falls

$$\hat{R}_I = -\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Die Transformationsmatrix  $\hat{R}_I$  ist offensichtlich reell und orthonormal und damit gilt  $\hat{R}_I^{-1} = \hat{R}_I$ . Wegen der negativen Determinante ( $\det(\hat{R}_I) = -1$ ) handelt es sich hier nicht um eine Drehung, aber jede Matrix mit Determinante  $-1$  kann als Produkt von  $\hat{R}_I$  und einer Drehmatrix geschrieben werden.

Für die Paritätsoperation, angewendet auf den Zustand  $\alpha$ , gilt:

$$\psi'_\alpha(\hat{R}_I \vec{r}) = a\psi_\alpha(\vec{r}) \quad (64)$$

Da es sich ja um eine diskrete Transformation handelt, muss  $a$  hier eine Zahl sein.

Wie bei den anderen Symmetrieoperation führt man einen unitären Operator ein, den Raumspiegelungsoperator oder Paritätsoperator  $\hat{P}$ :

$$\hat{P}\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi'_\alpha(\vec{r}) \quad (65a)$$

Mit Gleichung (64) ergibt das:

$$\hat{P}\psi_\alpha(\vec{r}) = a\psi_\alpha(\hat{R}_I^{-1} \vec{r}) = a\psi_\alpha(\hat{R}_I \vec{r}) \quad (65b)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{P}^2\psi_\alpha(\vec{r}) &= a\hat{P}\psi_\alpha(\hat{R}_I \vec{r}) \\ &= a^2\psi_\alpha(\hat{R}_I^{-1} \hat{R}_I \vec{r}) = a^2\psi_\alpha(\vec{r}) \end{aligned} \quad (66)$$

Da bei zweimaliger Raumspiegelung der Zustand wieder dem Anfangszustand (bis auf Phasenfaktor) entsprechen muss, muss der Raumspiegelungsoperator  $\hat{P}^2$  jeden Zustand in sich selbst überführen. Das bedeutet, dass für  $a^2 = 1$  gelten muss und damit  $a = \pm 1$ .

Dasselbe gilt auch für superponierte Zustände, wobei  $a_\alpha^2$  bei allen Zuständen gleich sein muss:

$$\hat{P}^2\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^2 A_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}) \quad (67)$$

Dieses Wissen kann jetzt auch zur Charakterisierung von Teilchen genutzt werden. Bei Teilchen mit Spin 0 spricht man von pseudoskalaren Teilchen, wenn  $a = -1$  ist und von skalaren Teilchen bei  $a = 1$ .

Wie schon bei den kontinuierlichen Symmetrien genügt der gespiegelte Zustand derselben Schrödingergleichung wie der nicht gespiegelte, wenn der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  mit dem Raumspiegelungsoperator  $\hat{P}$  kommutiert:

$$\boxed{[\hat{H}, \hat{P}] = 0 \Rightarrow \text{Paritätserhaltung}} \quad (68)$$

Damit sind beide Operatoren gleichzeitig durch Diagonalmatrizen darstellbar und die Eigenwerte zum Paritätsoperator sind Erhaltungsgrößen.

Es gilt weiters

$$\langle \hat{P}\psi_{\alpha} | \hat{A} | \hat{P}\psi_{\beta} \rangle = \langle \psi_{\alpha} | \hat{P}^{\dagger} \hat{A} \hat{P} | \psi_{\beta} \rangle \quad (69)$$

mit der dynamischen Variable  $\hat{A}$  und dem unitären Operator  $\hat{P}$ . Mit Gleichung (65b) ergibt das:

$$\psi_{\alpha}(\vec{r}) = a \hat{P}^{\dagger} \psi_{\alpha}(\hat{R}_I \vec{r}) \quad (70a)$$

bzw.

$$\hat{P}^{\dagger} \psi_{\alpha}(\vec{r}) = \frac{1}{a} \psi_{\alpha}(\hat{R}_I \vec{r}) \quad (70b)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\dagger} \vec{r} \hat{P} \psi_{\alpha}(\vec{r}) &= a \hat{P}^{\dagger} \vec{r} \psi_{\alpha}(\hat{R}_I \vec{r}) \\ &= a \frac{1}{a} (\hat{R}_I \vec{r}) \psi_{\alpha}(\hat{R}_I \hat{R}_I^{-1} \vec{r}) \\ &= (-\vec{r}) \psi_{\alpha}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (71)$$

Das gilt für alle  $\psi_{\alpha}(\vec{r})$ , weshalb man allgemein schreiben kann:

$$\hat{P}^{\dagger} \vec{r} \hat{P} = -\vec{r} \quad (72)$$

Würde man anstelle der Gleichung (65a) die Definitionsgleichung für den Impuls ( $\hat{\vec{p}} = -i\hbar \hat{\vec{\nabla}}$ ) oder den Drehimpuls ( $\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}}$ ) verwenden, so erhält man folgende Beziehungen:

$$\hat{P}^\dagger \hat{\vec{p}} \hat{P} = -\hat{\vec{p}} \quad (73)$$

und

$$\hat{P}^\dagger \hat{\vec{L}} \hat{P} = \hat{\vec{L}} \quad (74)$$

Weiters ist bekannt, dass der Raumspiegelungsoperator nicht auf den Spin  $\hat{\vec{S}}$  wirkt, weshalb er mit diesem kommutiert. Aus der Beziehung  $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$  folgt:

$$\hat{P}^\dagger \hat{\vec{S}} \hat{P} = \hat{\vec{S}} \quad (75)$$

und

$$\hat{P}^\dagger \hat{\vec{J}} \hat{P} = \hat{\vec{J}} \quad (76)$$

Also ist nicht nur der Bahndrehimpuls  $\hat{\vec{L}}$ , sondern auch der Gesamtdrehimpuls  $\hat{\vec{J}}$  und der Spin  $\hat{\vec{S}}$  ein Pseudovektor.

Der Paritätsoperator ist selbst ein hermitescher Operator, deshalb führt er zu einer multiplikativen Quantenzahl, während die Eichtransformation zu einer additiven Quantenzahl führt, da bei ihr der hermitesche Operator im Exponenten erscheint. Das Produkt zweier Exponentialfunktionen führt zur Summe der Exponenten und demnach zu einem additivem Gesetz.

### Zeitumkehr

Die Zeitumkehr ist ebenfalls eine diskrete Symmetrie und bringt bei zweifacher Anwendung wieder die Identität. Jedoch lässt sich die Zeit nicht als Operator darstellen, sondern ist ein Parameter eines Zustands. Aus der Zeitumkehr kann auch keine Erhaltungsgröße abgeleitet werden.

In der klassischen Physik und der Elektrodynamik sind die Bewegungsgleichungen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, weshalb sie beim Austausch von  $t$  mit  $-t$  invariant sind.

Der Zeitumkehroperator  $\hat{T}$  wirkt auf Zeit, Impuls und Drehimpuls, lässt den Ort jedoch unverändert:

$$t \rightarrow -t \quad \text{und} \quad x \rightarrow x$$

und

$$\hat{\vec{p}} \rightarrow -\hat{\vec{p}} \quad \text{und} \quad \hat{\vec{L}} \rightarrow -\hat{\vec{L}}$$

Allgemein wird die Zeitumkehroperation durch den zeitunabhängigen Operator  $\hat{T}$  beschrieben:

$$\hat{T}\psi_\alpha(\vec{r}, t) = \psi_{\alpha'}(\vec{r}, -t) \quad (77)$$

Da der Zeitumkehroperator eine Symmetrieoperation beschreibt, muss er mit dem Hamiltonoperator vertauschen:

$$\hat{T}\hat{H} = \hat{H}\hat{T} \quad \text{bzw.} \quad \hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1} = \hat{H} \quad (78)$$

$$\boxed{[\hat{T}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow \text{Zeitumkehrerhaltung}}$$

Die Schrödingergleichung des zeitgespiegelten Zustands lautet:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\alpha'}(\vec{r}, -t) = \hat{H} \psi_{\alpha'}(\vec{r}, -t) \quad (79)$$

wobei sich das negative Vorzeichen durch die Zeitableitung ergibt. Multipliziert man die Schrödingergleichung des ursprünglichen Zustands von links mit  $\hat{T}$ , so erhält man:

$$(\hat{T}i\hat{T}^{-1})\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{T}\psi_\alpha(\vec{r}, t) = (\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1})\hat{T}\psi_\alpha(\vec{r}, t) = \hat{H}\hat{T}\psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (80)$$

Damit aber Gleichung (79) gilt, muss  $\hat{T}i\hat{T}^{-1} = -i$  sein.

Allgemein erfüllt der Zeitumkehroperator  $\hat{T}$  die Relationen:

$$\begin{aligned} \hat{T}(a\psi) &= a^*\hat{T}\psi \\ \hat{T}(a\psi + b\psi) &= a^*\hat{T}\psi + b^*\hat{T}\psi \end{aligned} \quad (81)$$

Deshalb spricht man beim Zeitumkehroperator von einem *antilinear* Operator. Das führt dazu, dass  $\hat{T}$  *antiunitär* ist, weil er als Produktoperator aus einem linearen Operator  $\hat{U}$  und einem Operator zur Komplex-Konjugation  $\hat{K}$  (mit  $\hat{K}\psi = \psi^*$  und  $\hat{K}$  ist selber antiunitär) dargestellt werden kann.

$$\hat{T} = \hat{U}\hat{K} \quad (82)$$

Der einfachste Fall bei Zeitumkehrungen behandelt Teilchen mit Spin 0, weil die Zustände durch eine einkomponentige Wellenfunktion dargestellt werden.

$$\psi_\beta(\vec{r}, t) = \vec{r} \psi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (83)$$



Wendet man nun den Zeitumkehroperator  $\hat{T}$  auf die Wellenfunktion an, so ändern sich die Zustände wie vorhin mit  $\psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) = \hat{T}\psi_{\alpha}(\vec{r}, t)$ . Daraus folgt:

$$\psi_{\beta'}(\vec{r}, t) = \vec{r}\psi_{\alpha'}(\vec{r}, t) \quad (84)$$

Da der Ortsvektor von der Zeitumkehr unbeeinflusst bleibt.

Eingesetzt in Gleichung (84) ergibt das:

$$\vec{r}\hat{T}\psi_{\alpha} = \vec{r}\psi_{\alpha'} = \psi_{\beta'} = \hat{T}\psi_{\beta} = \hat{T}\vec{r}\psi_{\alpha} \quad (85)$$

und damit für beliebige Zustände:

$$\vec{r}\hat{T} = \hat{T}\vec{r} \quad (86)$$

Betrachtet man anstelle der Wirkung des Ortsvektors, die des Impulsoperators  $\vec{p}$ , so erhält man die Beziehung:

$$\vec{p}\hat{T} = -\hat{T}\vec{p} \quad (87)$$

und analog dazu für  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ :

$$\vec{L}\hat{T} = -\hat{T}\vec{L} \quad (88)$$

Alle Gleichungen (86), (87) und (88) werden erfüllt, wenn der unitäre Operator die Einheit ist ( $\hat{U} = \mathbb{1}$  und damit der Zeitumkehroperator nichts anderes als der Komplex-Konjugationsoperator ist:

$$\hat{T} = \hat{K} \quad (89)$$

Jedoch ist zu beachten, dass dieses Ergebnis von der gewählten Darstellung abhängig ist (hier Ortsdarstellung).

Für Teilchen mit Spin erwartet man nun ein analoges Ergebnis (88) wie für den Bahndrehimpuls bei Spin 0 Teilchen. Also

$$\vec{S}\hat{T} = -\hat{T}\vec{S} \quad (90)$$

und

$$\vec{J}\hat{T} = -\hat{T}\vec{J} \quad (91)$$

Um diese Relationen zu erhalten, kann man zeigen, dass für den unitären Operator  $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi\hat{S}_y}$  gilt. Für Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  vereinfacht sich das zu  $\hat{T} = -i\hat{\sigma}_y\hat{K}$  mit  $\hat{\sigma}_y$  der Pauli-Matrix.

Der Zeitumkehroperator ist also ein antiunitärer Operator, der keine

messbaren Eigenwerte besitzt. Dennoch kann man aus ihm Erkenntnisse ziehen, da er beispielsweise die Gleichheit der Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Reaktion und die inverse Reaktion voraussagt.

### Zusammenfassung

Die bisher bekannten Erhaltungsgrößen der klassischen Physik, die in der Quantenmechanik zwar anders behandelt werden, aber auf dasselbe Ergebnis hinauslaufen, gelten weiter:

- (1) Energie  $E$
- (2) Impuls  $\vec{P}$  (3 Größen)
- (3) Drehimpuls  $\vec{L}$  (3 Größen)
- (4) Schwerpunkt  $\vec{R} - \vec{\bar{R}}$  (3 Größen)

Hinzu kommt jedoch noch der Aspekt der **Entartung** bei nichtabelschen Symmetriegruppen. So vertauschen beispielsweise die Drehimpulsoperatoren  $\hat{J}_i$  nicht, obwohl sie jeweils mit dem Hamiltonoperator vertauschen:

$$[\hat{H}, \hat{J}_i] = 0 \quad \text{aber} \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

Neben diesen so genannten kontinuierlichen Symmetrien tauchen in der Quantenmechanik auch **diskrete Symmetrien** auf, die zur Paritäts- und Zeitumkehrerhaltung führen.

- (1) Paritätserhaltung P
- (2) Zeitumkehrerhaltung T



## Symmetrien in der Teilchenphysik

Um mit Symmetrien in der Teilchenphysik<sup>6</sup> umgehen zu können, kann die quantenmechanische Formulierung in vielen Fällen weiterverwendet werden. So gelten für die Konzepte der Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung in der Formulierung des letzten Kapitels weiter. Jedoch treten einige entscheidende Aspekte hinzu, für die eine Formulierung mittels Quantenmechanik nicht mehr ausreicht.

- (1) Die Quantenmechanik ist eine Einteilchentheorie, was bedeutet, dass keine Teilchen erzeugt oder vernichtet werden können. Das ist aber gerade ein wesentlicher Punkt in der Teilchenphysik und fordert auch schon eine relativistische Theorie, da zur Teilchenerzeugung sehr hohe Energien notwendig sind.
- (2) Die Quantenmechanik ist eine nicht-relativistische Theorie. Das führt zu einem Kausalitätsproblem, da ein Teilchen in beliebiger Zeit mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeitssamplitude überall hinkommen könnte.
- (3) Ein dritter Punkt, der die Weiterentwicklung der Erkenntnisse aus der Quantenmechanik fordert, wurde bereits im Kapitel über den Zeitumkehroperator angesprochen. Im Gegensatz zum Ort oder Impuls kann die Zeit nicht als Operator dargestellt werden.

Um diese Aspekte zu berücksichtigen, wurde die Quantenfeldtheorie entwickelt, die zwar Konzepte der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik übernimmt, jedoch nicht aus diesen ableitbar ist. Deshalb sind eigene Postulate der Feldquantisierung notwendig. Zudem gibt die Beobachtung von Zerfällen bzw. das Fehlen von möglichen Reaktionen Anlass zur Formulierung neuer Erhaltungssätze (siehe Kapitel → Innere Symmetrien, Seite 71).

---

<sup>6</sup>Vgl. im folgenden Abschnitt hauptsächlich [Greiner 5], [Greiner 8], [Ecker] und [Frauenfelder/Henley] mit Ergänzungen aus [Fließbach II] und [TU-München]

### Quantenfeldtheorie

Ausgehend von der klassischen Feldtheorie wurde mit der Feldquantisierung die Beschreibung eines lokalen Quantenfeldes eingeführt. Die Feldquantisierung ermöglicht die Beschreibung von masselosen Bosonen. Für Materieteilchen musste die Theorie zur relativistischen Quantenmechanik erweitert werden, welche auch die masselosen Bosonen inkludiert. Fermionen sind bis jetzt noch nicht berücksichtigt worden, weshalb die Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED) notwendig war.

**Klassische Feldtheorie.** Die bis jetzt behandelten Symmetrien in der Mechanik und Quantenmechanik waren entweder vom Ort oder von der Zeit abhängig. Felder sind hingegen sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängig und brauchen eine relativistische Beschreibung. Deshalb führt man anstelle des Ortsvektors, der jetzt zur nicht quantisierten Variable degradiert wurde, und der Zeit, die nicht als Operator dargestellt werden muss (was wie gerade erwähnt nicht möglich ist), den *Vierer- oder Lorentzvektor* ein:

$$(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (I)$$

und für ein  $n$ -komponentiges Feld:

$$u_r = U_r(x_\alpha) = U_r(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (II)$$

Die Ableitung wird folgendermaßen angeschrieben

$$u_{r|\alpha} = \frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha} \quad (III)$$

Wie auch in der klassischen Mechanik können aus dem *Hamiltonprinzip*

$$\delta \int dt L = \frac{1}{c} \delta \int d^4 \mathcal{L} = 0 \quad (IV)$$

die *Feldgleichungen* (das Pendant zu den Lagrangegleichungen in der klassischen Mechanik) ermittelt werden.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{r|\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} = 0} \quad \text{Feldgleichungen} \quad (V)$$

Mit der Lagrangefunktion bzw. Lagrangedichte

$$L = \int d^3x \underbrace{\mathcal{L}(u_r, u_{r|\alpha}, x_\beta)}_{\text{Lagrangedichte}} \quad \text{Lagrangefunktion der Feldtheorie} \quad (VI)$$

Auch für Transformationen kann eine Verallgemeinerung für die Feldtheorie gefunden werden

$$u_r \rightarrow u_r^* = u_r + \epsilon \Psi_r$$

$$x_\alpha \rightarrow x_\alpha^* = x_\alpha + \epsilon \Phi_\alpha$$

damit kann die *Invarianzbedingung* angeschrieben werden

$$\frac{d}{dt} \left[ \mathcal{L}(u_r^*, u_{r|\alpha}^*, x_\beta^*) \right]_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{Invarianzbedingung} \quad (VII)$$

Analog zur klassischen Mechanik kann damit die Erhaltungsgröße mittels *Noethertheorem der Feldtheorie* identifiziert werden.

$$J^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{r|\alpha}} (u_{r|\beta} \Phi^\beta - \Psi_r) - \mathcal{L} \Phi^\alpha \quad \text{Noethertheorem der Feldtheorie} \quad (VIII)$$

und daraus folgt

$$\delta_\alpha J^\alpha = 0 \quad \text{differentieller Erhaltungssatz für die Stromdichte} \quad (IX)$$

mit  $\delta_\alpha$  der partiellen Ableitung nach jeder Komponente  $\alpha$ .  
 Die Erhaltungsgröße  $J^\alpha$  kann dabei in Ladungsdichte  $J^0 = c\rho$  und Stromdichte  $\vec{J} = \vec{j}$  aufgeteilt werden (mit  $c = 1$ , wie in der Teilchenphysik üblich):

$$J^\alpha = \begin{pmatrix} J^0 \\ \vec{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Deshalb spricht man auch von der erhaltenen Noetherladung bzw. den erhaltenen Noetherströmen.

Gleichung (IX) umgeschrieben ergibt nichts anderes als die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (X)$$

Integriert man nun über ein festes Volumen  $V$ , so erhält man (mit dem Gaussschen Satz, siehe  $\rightarrow$  Begriffslexikon im Anhang) ein Oberflächenintegral  $A(V)$ , welches bei  $V \rightarrow \infty$  gegen 0 geht:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x J^0 &= - \int_V d^3x \operatorname{div} \vec{J} = \\ &\underbrace{=}_{\text{Gaußscher Satz}} - \int_{A(V)} d\vec{A} \cdot \vec{J} = 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die *Ladungserhaltung in der klassischen Feldtheorie*.

$$\Rightarrow Q = \int d^3x J^0 = \text{const.} \Rightarrow \text{Ladungserhaltung} \quad (XI)$$

**Feldquantisierung.** Fasst man Quantenfelder als (unendlich) viele harmonische Oszillatoren auf, so ergibt sich in Analogie zur klassischen Mechanik und der Quantenmechanik der Hamiltonoperator für  $f$  Freiheitsgrade zu

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\hat{P}_{\alpha}^2}{M_{\alpha}} + M_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 \hat{Q}_{\alpha}^2 \right) \quad (XII)$$

mit den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\hat{Q}_{\alpha}, \hat{P}_{\beta}] = i\hbar_{\alpha\beta}, \quad [\hat{Q}_{\alpha}, \hat{Q}_{\beta}] = [\hat{P}_{\alpha}, \hat{P}_{\beta}] = 0 \quad (XIII)$$

Die relevanten Freiheitsgrade sind jedoch nicht die ursprünglichen Koordinaten und Impulse, sondern die Oszillatorvariablen (bzw. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)  $a_{\alpha}, a_{\alpha}^{\dagger}$ , da sie die Quanten des Systems beschreiben:

$$\begin{aligned} a_{\alpha} &= \sqrt{\frac{M_{\alpha}\omega_{\alpha}}{2\hbar}} \hat{Q}_{\alpha} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar M_{\alpha}\omega_{\alpha}}} \hat{P}_{\alpha} \\ \text{bzw} \quad a_{\alpha}^{\dagger} &= \sqrt{\frac{M_{\alpha}\omega_{\alpha}}{2\hbar}} \hat{Q}_{\alpha} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar M_{\alpha}\omega_{\alpha}}} \hat{P}_{\alpha} \end{aligned} \quad (XIV)$$

Der Hamiltonoperator und die Vertauschungsrelationen lauten damit

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^f \hbar\omega_{\alpha} (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \frac{1}{2}), \quad [a_{\alpha}, a_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta}, [a_{\alpha}, a_{\beta}] = 0 \quad (XV)$$



mit  $a_\alpha^\dagger a_\alpha$  dem Teilchenzahloperator.

Für die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes erhält man mithilfe der klassischen Feldtheorie durch Lösung der inhomogenen Wellengleichung ohne Ladung und Ströme die Vertauschungsrelationen für Fourierkomponenten des Feldoperators  $\vec{A}(x)$ :

$$\begin{aligned} [a_\alpha(\vec{k}), a_\beta^\dagger(\vec{k}')] &= \delta_{\alpha\beta} (2\pi)^3 2\omega(k) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a_\alpha(\vec{k}), a_\beta(\vec{k}')] &= 0 \end{aligned} \quad (XVI)$$

Dabei ist  $\vec{k}$  der Wellenzahlvektor (bzw. der Impuls wegen  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ ) und die Delta-Funktion  $\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$  (hier dreidimensional) ist die Verallgemeinerung des Kronecker-Deltas für kontinuierliche Variablen.

Für den Hamiltonoperator und den Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes, das zwei Freiheitsgrade hat, gilt

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) \underbrace{\hbar\omega(k)}_{=E} a_\alpha^\dagger(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k}) \\ \hat{\vec{P}} &= \sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) \underbrace{\hbar\vec{k}}_{=\vec{p}} a_\alpha^\dagger(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k}) \end{aligned} \quad (XVII)$$

Dabei ist  $a_\alpha^\dagger(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k})$  der Teilchenzahloperator.

Die Konstruktion des 1-Photon-Zustandes ergibt sich einfach durch

$$\begin{aligned} |\vec{k}, \alpha\rangle &= a_\alpha^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \longrightarrow \\ \hat{H} |\vec{k}, \alpha\rangle &= \hbar\omega |\vec{k}, \alpha\rangle, \quad \hat{\vec{P}} |\vec{k}, \alpha\rangle = \hbar\vec{k} |\vec{k}, \alpha\rangle \end{aligned} \quad (XVIII)$$

Der allgemeine 2-Photon-Zustand kann zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \int d\mu(k_1) d\mu(k_2) \underbrace{f_{\alpha_1, \alpha_2}}_{\text{Wellenfunktion}} (\vec{k}_1, \vec{k}_2) a_{\alpha_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{\alpha_2}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle \quad (XIX)$$

Wegen den Vertauschungsrelationen  $[a_{\alpha_1}^\dagger(\vec{k}_1), a_{\alpha_2}^\dagger(\vec{k}_2)] = 0$  folgt, dass Photonen *symmetrische Wellenfunktionen* bei Vertauschung der Koordinaten haben:

$$\boxed{f_{\alpha_1, \alpha_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = f_{\alpha_2, \alpha_1}(\vec{k}_2, \vec{k}_1)} \quad \text{Bose - Statistik} \quad (XX)$$

Das gilt für alle Teilchen mit ganzzahligem Spin. Photonen sind daher *Bosonen*.

**Relativistische Quantenmechanik.** Die bisherigen Überlegungen gelten jedoch nur für Teilchen mit Masse 0, aber auch Materieteilchen wollen durch die QFT beschrieben werden. Dazu braucht man eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung, die man durch Iteration (siehe Begriffslexikon) erhält und Klein-Gordon-Gleichung genannt wird:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \underbrace{\Delta}_{=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} + m^2 \right) \psi = (\square + m^2) \psi = 0 \quad \text{Klein - Gordon - Gleichung} \quad (XXI)$$

mit dem d'Alembert Operator  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

Für  $m \neq 0$  stellt die Klein-Gordon-Gleichung die Wellengleichung für massive Bosonen dar und führt im nicht relativistischen Grenzfall auf das kurzreichweitige Yukawa-Potential  $V(r) = \frac{e^{-mr}}{r}$ . Im Falle masseloser Bosonen ist die Klein-Gordon-Gleichung nichts anderes als die Feldgleichung für das elektromagnetische Feld  $A_\mu(x)$  mit Coulomb-Potenzial  $\frac{1}{r}$ . (In der QFT werden Formeln in Einheiten von  $c$  und  $\hbar$  angegeben, weshalb  $c = \hbar = 1$  ist.)

Um nun auch Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (mit dem Zweier-Spinor  $\psi$ ) beschreiben zu können, muss auch für diese eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung gefunden werden. Die *Dirac-Gleichung*, eine Matrix-Differentialgleichung, stellt diese Verallgemeinerung dar:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{Dirac-Gleichung} \quad (XXII)$$

mit der Abkürzung  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Eine mögliche jedoch nicht eindeutige Darstellungsform der Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$  wird durch die Pauli-Spin-Matrizen  $\sigma_i$  ausgedrückt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (XXIII)$$

Als nicht relativistische Näherung der Dirac-Gleichung fungiert die *Schrödinger-Pauli-Gleichung*, die schon bei der Herleitung des Gesamtdrehimpulses für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen im Abschnitt zu den Symmetrien in der Quantenmechanik verwendet wurde.

$$\boxed{\text{Schrödinger-Pauli-Gleichung}} \quad (XXIV)$$

$$\left[ -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - iq\vec{A})^2 - \frac{q}{2m}\vec{\sigma} \underbrace{\vec{B}}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}} + \underbrace{V}_{qA^0} \right] \chi(\vec{r}) = \underbrace{E_{NR}}_{E-m} \chi(\vec{r})$$

Im Falle der Fermionen müssen für ein vollständiges System beiderlei Vorzeichen bei der Energie zugelassen werden, da hier Teilchen und Antiteilchen nicht dasselbe sind und damit durch unterschiedliche Wellengleichungen beschrieben werden.

**Quantenelektrodynamik.** Bei der Quantisierung des Dirac-Feldes treten offensichtlich Unterschiede zum Bose-Feld auf: Neben der Fermi-Statistik mit Pauli-Verbot, denen die Elektronen genügen, scheint auch die Ladung in der Dirac-Theorie positiv definit zu sein, obwohl sie sowohl Elektronen als auch Positronen beschreiben soll! Für die normalen Vertauschungsrelationen ergibt sich weiters ein nicht nach unten beschränkter Hamiltonoperator. Deshalb führt man die *Antivertauschungsrelationen* ein:

$$\begin{aligned} [b(k, s), b^\dagger(k', s')]_+ &:= b(k, s)b^\dagger(k', s') + b^\dagger(k', s')b(k, s) = \\ [d(k, s), d^\dagger(k', s')]_+ &= (2\pi)^3 2\omega(k) \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (XXV) \end{aligned}$$

Damit haben Elektronen bei Vertauschung aller Koordinaten wie alle Teilchen mit halbzahligen Spin *antisymmetrische Wellenfunktion* und sind damit *Fermionen*:

$$\begin{aligned} [b^\dagger(k_1, s_1), b^\dagger(k_2, s_2)] &= 0 \rightarrow \\ \boxed{f_{s_1, s_2}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = -f_{s_2, s_1}(\vec{k}_2, \vec{k}_1)} &\quad \text{Fermi-Dirac-Statistik} \quad (XXVI) \end{aligned}$$

Damit ist der Hamiltonoperator wieder positiv definit und für die Ladung sind beiderlei Vorzeichen möglich:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \omega(k) [b^\dagger(k, s)b(k, s) + d^\dagger(k, s)d(k, s)] \\ \hat{\vec{P}} &= \sum_{\pm s} \int d\mu(k) \vec{k} [b^\dagger(k, s)b(k, s) + d^\dagger(k, s)d(k, s)] \\ \hat{Q} &= \sum_{\pm s} \int d\mu(k) [b^\dagger(k, s)b(k, s) - d^\dagger(k, s)d(k, s)] \quad (XXVII) \end{aligned}$$

mit  $b^\dagger(k, s)b(k, s)$  dem Teilchenzahloperator und  $d^\dagger(k, s)d(k, s)$  dem Teilchenzahloperator der Antiteilchen.

Der Hamiltonoperator der QED, allerdings noch ohne Wechselwirkung, lautet damit:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{QED}^0 = & \underbrace{\sum_{\alpha=1}^2 \int d\mu(k) |\vec{k}| a_{\alpha}^{\dagger}(k) a_{\alpha}(k)}_{\text{Photonen}} \\ & + \underbrace{\sum_{\pm s} \int d\mu(k) \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} [b^{\dagger}(k, s) b(k, s) + d^{\dagger}(k, s) d(k, s)]}_{\text{Elektronen, Positronen}} \end{aligned} \quad (XXVIII)$$

Vorteilhafter und auch einfacher in der Handhabung zeigt sich die Verwendung des *Lagrangedichte-Operators*  $\mathcal{L}$  anstelle des Hamiltonoperators in der QFT. Die allgemeine Struktur der Lagrangedichte lautet

$$\boxed{\mathcal{L}(\Phi, \partial\phi/\partial x^{\mu}) = \mathcal{L}_0 + \underbrace{\mathcal{L}_{WW}}_{\text{Wechselwirkung}}} \quad (XXIX)$$

Konkret für die Lagrangedichte der QED gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi + e \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \vec{A}_{\mu} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} [i\gamma^{\mu} (\partial_{\mu} - ie \vec{A}_{\mu}) - m] \psi \end{aligned} \quad (XXX)$$

mit  $F_{\mu\nu}$  dem Feldstärketensor (siehe Anhang),  $\gamma^{\mu}$  den Dirac-Matrizen,  $A^{\mu}$  dem Vektorfeld und  $\partial_{\mu}$  der abgekürzten Ableitung (siehe  $\rightarrow$  Dirac-Gleichung).

Die Feldgleichungen sind jedoch nicht exakt lösbar, weshalb auch noch eine Störungstheorie angewendet werden muss, die in Potenzen von  $e$ , der elektrischen Ladung, (bzw. in Potenzen der Feinstrukturkonstante  $\alpha$ ) entwickelt wird.

Für diese Störungstheorie wird die Wahrscheinlichkeitsamplitude gesucht, damit der Anfangszustand in den gewünschten Endzustand übergeht. Zur Beschreibung dieses Übergangs werden die Elemente der Streumatrix  $S(out; in) = \langle p', s'; q', \alpha'; out | p, s; q, \alpha; in \rangle$  in systematischer Entwicklung nach Potenzen von  $e$  konstruiert.

Durch Veranschaulichung komplizierter Prozeduren mittels Feynman-Diagrammen können Korrekturen höherer Ordnung durch Schleifendiagramme repräsentiert werden. Es wird dann nach der Anzahl der Schleifen entwickelt bzw. bei der systematischen QFT-Korrektur entspricht die Amplitude  $\hbar^L$  L Schleifen.

Die Entwicklung der Quantenfeldtheorie führt nun zur Schaffung neuer Begriffe und neuer Symmetrien, wie im Folgenden gezeigt wird.

### Teilchen und Antiteilchen

Der Begriff des Antiteilchens, der sowohl für Bosonen als auch für Fermionen gilt, wurde erst mit der relativistischen Energie-Impulsbeziehung notwendig. Diese lautet nämlich:

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1)$$

Damit gibt es sowohl positive als auch negative Werte für die Energie. Zunächst stellte das kein Problem dar, da die negativen Werte einfach ignoriert wurden.

Doch bei Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen, die mit der relativistischen Erweiterung der Schrödingergleichung, der Dirac-Gleichung, beschrieben werden, stellte sich bald heraus, dass bei der Lösung der Dirac-Gleichung Wellenfunktionen auftreten, die zu den negativen Energiezuständen gehören. Für gewöhnliche Teilchen war negative Energie ausgeschlossen, denn sonst würde die gesamte Materie schnell verschwinden. Dirac führte daraufhin den Begriff des Antiteilchens, fehlende Teilchen in einer Löchertheorie, ein. In der modernen Deutung, die besonders von Richard Feynman geprägt wurde, versteht man die Antiteilchen als Teilchen mit inversen additiven Quantenzahlen. (siehe Kapitel → Diskrete Symmetrien aus dem vorherigen Kapitel: Symmetrien in der Quantenmechanik, Seite)

Betrachtet man ein Teilchen entlang der x-Achse mit positiver Energie, so kann man seine Wellenfunktion folgendermaßen aufschreiben:

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - (+)Et)} \quad (2)$$

wobei sich das Teilchen mit  $px - (+)Et = \text{const.}$  bzw.  $x = \frac{(+ )Et}{p} + \frac{\text{const.}}{p}$  in positive x-Richtung bewegt. Für Teilchen mit negativer Energie gilt hingegen:

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - \underbrace{(-)Et}_{+})} \quad (3)$$

mit  $x = \frac{-Et}{p} = -\frac{|-E|}{p}t = \frac{|E|}{p}(-t)$ . Also kann ein Teilchen mit negativer Energie als Teilchen mit positiver Energie aufgefasst werden, dass sich zeitlich rückwärts bewegt.

Betrachtet man jetzt weiters ein Teilchen mit Ladung  $q$  im magnetischen Feld, so erhält man:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{q}{c} \frac{d \vec{r}}{dt} \times \vec{B} = \frac{q}{c} \frac{d \vec{r}}{d(-t)} \times \vec{B} \quad (4)$$

Deshalb beschreibt ein Teilchen mit Ladung  $q$  und negativer Energie dieselbe Bewegungsgleichung wie ein Teilchen mit Ladung  $-q$  und positiver Energie.

Allgemein kann man folgern, dass Teilchen und Antiteilchen denselben Spin und dieselbe Masse besitzen, sich hingegen in den additiven Quantenzahlen unterscheiden. Die Summe der entsprechenden additiven Quantenzahlen für ein Teilchen-Antiteilchen-Paare ist gleich 0:

$$\boxed{T_i + \bar{T}_i = 0} \quad (5)$$

mit  $T_i$  als additive Quantenzahlen.

### Innere Symmetrien

Bei allen Beispielen, die bis jetzt behandelt wurden, wurde die Raum-Zeit transformiert. In der Quantenfeldtheorie (eigentlich zu aller erst bei der klassischen Feldtheorie) werden nun auch nur Felder transformiert. Diese Transformationen lassen die Raum-Zeit unverändert und werden als *innere Symmetrien* bezeichnet. Hierbei unterscheidet man zwischen abelschen (z.B.: Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl) und nicht-abelschen (z.B.: Isospin) inneren Symmetrien. Im folgenden sollen zuerst die abelschen Symmetrien behandelt werden.

### Ablesche innere Symmetrien

Alle additiven Quantenzahlen entsprechen sogenannten  $U(1)$ -Symmetrien, womit einparametrische (abelsche) Symmetrien gemeint sind. Insbesondere gilt das für die Ladung  $Q$ , die Baryonenzahl  $B$  und die Leptonenzahl  $L$ . Als abelsche Symmetrie hat die  $U(1)$  keine Auswirkung auf das Teilchenspektrum. Regelmäßigkeiten sowohl im Spektrum als auch in Teilchenreaktionen werden hingegen mit nicht-abelschen inneren Symmetrien beschrieben (siehe  $\rightarrow$  Isospin, Seite 75).

### Ladung

Die Ladungserhaltung ist bereits aus der klassischen Feldtheorie bekannt und liefert auch in der Teilchenphysik wichtige Erkenntnisse.

Die Frage nach der Stabilität der Atome kann zum Teil mit der Ladungserhaltung beantwortet werden. Würde das Elektron nämlich zerfallen, so müsste das durch die Aussendung eines Gamma-Quanten erkennbar sein. Da jedoch keine derartige Beobachtung gemacht wurde

(und wird), kann man daraus auf die Ladungserhaltung schließen. Es gilt also, wie in der klassischen Feldtheorie:

$$\sum_i Q_i = \text{const.} \quad (6)$$

Um die Ladungserhaltung in der Quantenmechanik zu zeigen, muss der Zustand  $\psi_Q$  vor und nach der Symmetrieoperation dieselbe Schrödingergleichung erfüllen:

$$i\hbar \frac{d\psi_Q}{dt} = \hat{H}\psi_Q \quad (7)$$

Wenn man  $\hat{Q}$  als Ladungsoperator bezeichnet, so gilt die Invarianz genau dann, wenn  $\hat{H}$  und  $\hat{Q}$  miteinander kommutieren und  $\psi_Q$  damit als Eigenfunktion von  $\hat{Q}$  gewählt werden kann:

$$\hat{Q}\psi_Q = q\psi_Q \quad (8)$$

Wobei der Eigenwert  $q$  auch erhalten bleibt. Betrachtet man nun die Eichtransformation erster Ordnung, so garantiert das die Kommutativität des Hamiltonoperators mit dem Ladungsoperator.

$$\psi'_Q = e^{i\epsilon\hat{Q}}\psi_Q \quad (9)$$

Setzt man nun in die Schrödingergleichung des transformierten Zustandes ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt}(e^{i\epsilon\hat{Q}}\psi_Q) &= \hat{H}(e^{i\epsilon\hat{Q}}\psi_Q) \\ e^{-i\epsilon\hat{Q}}\hat{H}e^{i\epsilon\hat{Q}} &= \hat{H} \end{aligned} \quad (10)$$

Da  $\epsilon$  ein beliebiger Parameter ist, kann er so klein gewählt werden, dass sich mit der Entwicklung der Exponentialfunktion die Invarianzbedingung ergibt:

$$\begin{aligned} (1 - i\epsilon\hat{Q})\hat{H}(1 + i\epsilon\hat{Q}) &= \hat{H} \\ \hat{H} - i\epsilon\hat{Q}\hat{H} + \hat{H}i\epsilon\hat{Q} + \underbrace{\epsilon^2\hat{H}\hat{Q}}_{\approx 0} &= \hat{H} \\ \Rightarrow \left[ \hat{Q}, \hat{H} \right] &= 0 \Rightarrow \text{Ladungserhaltung} \end{aligned} \quad (11a)$$

Das bedeutet: Die Invarianz unter der Eichtransformation garantiert die Erhaltung der Ladung!



In der Quantenelektrodynamik kann man aufgrund der invarianten Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{QED}$  auch wie in der klassischen Feldtheorie mit der Kontinuitätsgleichung ( $\partial_\mu j^\mu = \partial\rho/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$  mit  $j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ) die Ladungserhaltung folgern

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = 0 \text{ mit } \hat{Q} = \int d^3r \bar{\psi}\gamma^0\psi \rightarrow \text{Ladungserhaltung} \quad (11b)$$

### Baryonenzahl

Alleine die Stabilität des Elektrons reicht noch nicht aus um die Stabilität des gesamten Atoms zu erklären. Entscheidend ist dabei auch die Lebensdauer der Protonen. Um diese zu beschreiben, wird eine neue Quantenzahl eingeführt, die *Baryonenzahl*  $B$ . Baryonen gehören zu den Hadronen, also den stark wechselwirkenden Teilchen, und haben halbzahliges Spin, sind also auch Fermionen. Dem Proton und dem Neutron wird eine Baryonenzahl von  $B = 1$  zugeordnet und den dazugehörigen Antiteilchen  $B = -1$ . Leptonen, Photonen und Mesonen ordnet man dementsprechend die Zahl  $B = 0$ . Mit diesen Konventionen, kann nun der additive Erhaltungssatz für die Baryonenzahl formuliert werden.

$$\sum_i B_i = \text{const.} \quad (12)$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass die Gesamtzahl der Nukleonen erhalten bleiben muss.

So kann beispielsweise die Reaktion

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+$$

nicht stattfinden, denn obwohl sowohl Ladung, Energie, Impuls und Drehimpuls erhalten bleiben, ist die Baryonenzahl (und auch die Leptonenzahl, siehe dazu das nächste Kapitel) auf der rechten und linken Seite nicht gleich. ( $B : 1 \neq 0 + 0$ )

Hingegen wäre die Reaktion

$$n \rightarrow p + \pi^-$$

nach dem Baryonenzahlerhaltungssatz ( $B : 1 = 1 + 0$ ) möglich (jedoch wird der Energieerhaltungssatz verletzt!).

Analog zur Ladungserhaltung führt auch hier die Eichtransformation  $\psi'_B = \psi_B e^{i\epsilon\hat{B}}$  mit  $\hat{B}$  als Baryonenzahloperator zum Erhaltungssatz.

$$\boxed{\left[\hat{B}, \hat{H}\right] = 0 \Rightarrow \text{Baryonenzahlerhaltung}} \quad (13)$$

### Leptonenzahl

Weil trotz den bisher eingeführten Erhaltungssätzen Zerfälle möglich sind, die in der Realität nicht vorkommen, führt man einen weiteren Erhaltungsgröße ein. Die Leptonenzahl  $L$ :

$$\sum_i L_i = \text{const.} \quad (14)$$

Leptonen, womit Teilchen bezeichnet werde, die nicht der starken Wechselwirkung unterliegen, wird dabei der Wert 1 zugeordnet, während für ihre Antiteilchen  $L = -1$  und für alle Teilchen, die keine Leptonen sind,  $L = 0$  gilt.

Mit diesem Erhaltungssatz und allen sonstigen bekannten Erhaltungssätzen sollte die Reaktion

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$$

beobachtbar sein ( $L : 1 = 1 + 0$ ), was jedoch nicht der Fall ist. Deshalb war es nötig eine Differenzierung dieses Erhaltungssatzes einzuführen. Nicht die Gesamtzahl aller Leptonen bleibt erhalten, sondern man unterscheidet zwischen Elektronenzahl, Myonenzahl und Tauonenzahl, die einzeln erhalten sind.

$$\sum_i L_{i,e} = \text{const.} \quad (15a)$$

$$\sum_i L_{i,\mu} = \text{const.} \quad (15b)$$

$$\sum_i L_{i,\tau} = \text{const.} \quad (15c)$$

Nun tragen nicht nur Elektronen die Leptonenzahl  $L_e = 1$  sondern auch die dazugehörigen Neutrinos  $\nu_e$ ! Die entsprechenden Antiteilchen erhalten die Leptonenzahl -1 und alle übrigen Teilchen  $L_e = 0$  (also auch  $L_\mu = 0$ !). Die Reaktion von vorhin ( $\mu \rightarrow e \gamma$ ) zeigt auch, dass die Unterscheidung zwischen den einzelnen Neutrinos entscheidend ist. Der beobachtbare  $\beta$ -Zerfall korrespondiert auch mit der separaten Erhaltung der Leptonenzahl:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad (L_e : 0 = 0 + 1 - 1)$$

Mit der Eichtransformation für die Elektronenzahl  $\psi_{L'_e} = \psi_{L_e} e^{i\epsilon \hat{L}_e}$  kann der Erhaltungssatz hergeleitet werden, wobei  $\hat{L}_e$  den Leptonenzahloperator für die Elektronen darstellt. Analoges gilt natürlich für die Myonenzahl und die Tauonenzahl. Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\left[ \hat{L}_e, \hat{H} \right] = 0 \Rightarrow \text{Leptonenzahlerhaltung für Elektronen}} \quad (16a)$$

$$\boxed{\left[ \hat{L}_\mu, \hat{H} \right] = 0 \Rightarrow \text{Leptonenzahlerhaltung für Myonen}} \quad (16b)$$

$$\boxed{\left[ \hat{L}_\tau, \hat{H} \right] = 0 \Rightarrow \text{Leptonenzahlerhaltung für Tauonen}} \quad (16c)$$

### Nicht-abelsche innere Symmetrien - der Isospin

Die Erkenntnis, dass die starke Wechselwirkung ladungsunabhängig ist, und die große Ähnlichkeit zwischen Protonen und Neutronen gab den Anlass dazu, beide Teilchen als zwei Zustände eines Teilchens, des Nukleons, aufzufassen. Der Unterschied der beiden wurde als *Isobarens* spin oder kurz *Isospin*  $\vec{T}$  bezeichnet. (Die geringe Massendifferenz von Proton und Neutron hat ihre Ursache in ihrem unterschiedlichem Verhalten gegenüber der elektromagnetischen Wechselwirkung) Die Zustandsfunktion des Nukleons hängt von den Raum-Zeit-Koordinaten  $\vec{r}$ ,  $t$  und den Spinkoordinaten  $s$  ab. Hinzu kommt nun die Isospinkoordinate, die nur einen der beiden Werte  $+1$  oder  $-1$  annehmen kann.

$$\psi_p = \psi(\vec{r}, t, S, \iota = +1) = \text{Protonenzustand}$$

$$\psi_n = \psi(\vec{r}, t, S, \iota = -1) = \text{Neutronenzustand}$$

oder als zweikomponentiger Spaltenvektor (Spinor) geschrieben

$$\psi = \begin{pmatrix} U_1(\vec{r}, t, S) \\ U_2(\vec{r}, t, S) \end{pmatrix} \quad (17)$$

wobei das Quadrat von  $U_1$  die Wahrscheinlichkeit dafür darstellt das Proton am Ort  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  und dem Spin  $S$  aufzufinden. Analoges gilt für das Neutron.

Der Protonen-, bzw. Neutronenzustand kann auch als Vektor geschrieben werden.

$$\begin{aligned}\psi_p &= \begin{pmatrix} U_1(\vec{r}, t, S) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{bzw.} \\ \psi_n &= \begin{pmatrix} 0 \\ U_2(\vec{r}, t, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Das erhält man, indem der Matrix-Operator

$$\hat{\iota}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

eingeführt wird und auf die Eigenwertgleichung mit den Eigenwerten  $\pm 1$  angewendet wird.

$$\hat{\iota}_3 \psi_p = +1 \psi_p$$

$$\hat{\iota}_3 \psi_n = -1 \psi_n$$

Man kann nun wiederum einen Satz von Operatoren einführen, die als Generatoren (also als Erzeugende) der gesamten Gruppe fungieren. Dabei muss mithilfe dieser Operatoren  $\hat{\iota}_+$ ,  $\hat{\iota}_-$  der Protonenzustand in den Neutronenzustand übergeführt werden können und umgekehrt. Also

$$\begin{aligned}\hat{\iota}_+ \psi_p &= 0, & \hat{\iota}_+ \psi_n &= \psi_p, \\ \hat{\iota}_- \psi_p &= \psi_n, & \hat{\iota}_- \psi_n &= 0\end{aligned}$$

Das ergibt zusammen mit den Vektoren (18):

$$\hat{\iota}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\iota}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Für den weiteren Gebrauch sind jedoch die nicht singulären, hermiteschen Linearkombinationen der beiden Operatoren  $\hat{I}_+$ ,  $\hat{I}_-$  vorteilhafter:

$$\hat{\iota}_1 = \hat{\iota}_+ + \hat{\iota}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (21a)$$

$$\hat{\iota}_2 = -i(\hat{\iota}_+ - \hat{\iota}_-) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (21b)$$

Zusammen mit  $\hat{\iota}_3$  (19) sind diese drei Matrizen nichts anderes als die Pauli-Matrizen und  $\hat{\iota}_{+/-}$  die Leiteroperatoren. Die Pauli-Matrizen vertauschen zyklisch und können mit der Einheitsmatrix als Linearkombination aller selbstadjungierten Operatoren des zweikomponentigen Nukleonensystems darstellen.

Führt man den Operator

$$\hat{I}_k = \frac{1}{2}\hat{\iota}_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (22)$$

ein, so ergeben sich die Vertauschungsrelationen

$$\hat{I}_i \hat{I}_j - \hat{I}_j \hat{I}_i = \epsilon_{ijk} \hat{I}_k \quad (23)$$

Hier erkennt man wieder die Analogie zum Spinoperator, wo  $\hat{S}_k = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_k$ .

Die hermiteschen Operatoren  $\hat{I}_k$  bilden eine geschlossene Algebra, wie auch schon beim Spin, weshalb die dazugehörigen unitären Operatoren sofort angegeben werden können:

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(\vec{\epsilon}) &= \hat{U}_I(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = e^{-i\epsilon_k \hat{I}_k} = e^{-\frac{i}{2}(\epsilon_1 \hat{\iota}_1, \epsilon_2 \hat{\iota}_2, \epsilon_3 \hat{\iota}_3)} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\epsilon n_k \hat{\iota}_k} = \mathbf{1} \cos\left(\frac{1}{2}\epsilon\right) - i n_k \hat{\iota}_k \sin\left(\frac{1}{2}\epsilon\right) \end{aligned} \quad (24)$$

Der Winkel  $\vec{\epsilon}$  beschreibt eine Drehung im *Isospin-Raum*, einem abstrakten, dreidimensionalen Vektorraum.

Die Gruppe der Isodrehoperatoren (24) besteht aus unitären  $2 \times 2$  Matrizen mit der Determinanten  $+1$ . Diese Symmetriegruppe wird als  $SU(2)$  bezeichnet, d.h. als spezielle ( $\det = 1$ ) unitäre Drehung in 2 Dimensionen. Der *Iso-Spinor*  $\psi$  transformiert sich dann folgendermaßen

$$\begin{aligned} \psi'(\vec{r}, t, S) &= \begin{pmatrix} U_1'(\vec{r}, t, S) \\ U_2'(\vec{r}, t, S) \end{pmatrix} = e^{-i\epsilon_k \hat{I}_k} \psi(\vec{r}, t, S) \\ &= e^{-i\epsilon_k \hat{I}_k} \begin{pmatrix} U_1(\vec{r}, t, S) \\ U_2(\vec{r}, t, S) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

Um die Nukleonenzustände zu klassifizieren, kann die 3.Komponente des Isospins verwendet werden

$$\hat{I}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

deren Eigenzustände  $\frac{1}{2}$  für Protonen bzw.  $-\frac{1}{2}$  für Neutronen stehen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Nukleonen, die Ladungsdifferenz, kann damit ebenfalls beschrieben werden. Die Ladungsunabhängigkeit besagt, dass die starke Wechselwirkung nicht zwischen Protonen und Neutronen unterscheidet. Solange nur die starke Wechselwirkung vorhanden ist, kann der Isospinvektor  $\vec{I}$  in jede beliebige Richtung zeigen. Das heißt im Isospinraum herrscht Rotationsinvarianz.

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_{stark}, \hat{U}_I] &= 0 \\
[\hat{H}_{stark}, e^{-i\epsilon_k \hat{I}_k}] &= 0 \\
\boxed{[\hat{H}_{stark}, \vec{\hat{I}}] = 0 \Rightarrow \text{Isospinerhaltung}} & \quad (27)
\end{aligned}$$

Falls nur die starke Wechselwirkung  $\hat{H}_{stark}$  vorhanden ist, sind die Zustände  $(2I + 1)$ -fach entartet und damit haben sie dieselbe Energie (Masse) (Analogon zum Drehimpuls!). Anders ausgedrückt: Gäbe es nur die starke Wechselwirkung, so hätten Protonen und Neutronen dieselbe Masse. Die elektromagnetische Wechselwirkung verletzt jedoch die Symmetrie, weshalb die Entartung aufgehoben wird und die beiden Nukleonen unterschiedliche Masse besitzen (Zeemaneffekt!).

$$[\hat{H}_{stark} + \hat{H}_{elm}, \vec{\hat{I}}] \neq 0 \quad (28)$$

Die unterschiedliche Ladung der beiden Nukleonen wird durch den *Ladungsoperator*  $\hat{Q}$  beschrieben

$$\boxed{\hat{Q} = e(\hat{I}_3 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e(\hat{\iota}_3 + 1)} \quad (29)$$

womit das Proton den Eigenwert  $+e$  und das Neutron 0 hat. Die Ladungserhaltung gilt allgemein, weshalb man schreiben kann

$$[\hat{H}_{stark} + \hat{H}_{elm}, \hat{Q}] = 0 \quad (30)$$

Setzt man nun den Ladungsoperator (29) in die Kommutatorbeziehung ein, so erhält man

$$[\hat{H}_{stark} + \hat{H}_{elm}, \underbrace{\frac{1}{2}e (\hat{\iota}_3 + 1)}_{const.}] = 0$$

$$\boxed{[\hat{H}_{stark} + \hat{H}_{elm}, \hat{\iota}_3] = 0 \Rightarrow \text{Erhaltung der 3. Komponente des Isospins}} \quad (31)$$

Das bedeutet, dass die dritte Komponente des Isospins selbst in Gegenwart der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten bleibt. Obwohl die Gleichungen formal sehr ähnlich zu denen des Spins sind, hängen der Isospin und dessen dritte Komponente nicht direkt mit messbaren physikalischen Größen zusammen.

Wie auch beim gewöhnlichen Spin gilt die Verallgemeinerung auf ein System von  $A$  Nukleonen. Der Isospin des  $n$ -ten Nukleons lautet dann

$$\hat{\vec{T}}(n) = \frac{1}{2} \hat{\vec{t}}(n), \quad (n = 1, 2, \dots, A) \quad (32)$$

Ebenso analog gilt

$$[\hat{\vec{T}}(n), \hat{\vec{T}}(n')] = 0 \quad (33)$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass jede Komponente von  $\hat{\vec{T}}$  des  $n$ -Raums mit jeder Komponente von  $\hat{\vec{T}}$  des  $n'$ -Raums kommutiert. Deshalb kann man den Gesamt-Isospin des Systems auch als Summe der einzelnen Nukleonen definieren

$$\hat{\vec{T}} = \sum_{n=1}^A \hat{\vec{T}}(n) = \frac{1}{2} \hat{\vec{t}}(n) \quad (34)$$

und der Ladungsoperator kann entsprechend formuliert werden

$$\hat{Q} = \sum_n \hat{Q}(n) = e \sum_{n=1}^A \frac{1}{2} (\hat{\vec{t}}(n) + 1) = e(\hat{I}_3 + \frac{1}{2}A) \quad (35)$$

Da Atomkerne durch zwei Zahlen, die Massenzahl  $A$  und die Ladungszahl  $Z = \frac{Q}{e}$  gekennzeichnet sind, können Isobare (Kerne gleicher Masse  $A$ ) sich nur in dem Wert für  $I_3$  unterscheiden, woher auch der Name Isobarspin herrührt.

Wie schon des Öfteren erwähnt wurde, ist die Algebra der Isospin-Gruppe dieselbe wie die der Drehimpulsalgebra. Die beiden Gruppen sind isomorph zueinander.

Für den Fall, dass  $T = \frac{1}{2}$  ist, spricht man von einem fundamentalen Iso-Dublett. Es ist das kleinste nicht-triviale Multiplett der  $SU(2)$ , womit gemeint ist, dass aus ihm alle höheren Multipletts aufgebaut werden können. Bei  $T = 1$  handelt es sich um ein Iso-Triplett, dass beispielsweise von Pionen realisiert wird.

Wie gerade mit den Iso-Tripletts bei Pionen angedeutet wurde, gilt der Begriff des Isospins nicht nur für die Kernteilchen Protonen und Neutronen, sondern allgemein für alle Hadronen, da diese der starken Wechselwirkung unterliegen. So bilden beispielsweise Pionen einen Isovektor mit

$$I_3 = \begin{cases} +1 & \pi^+, & m = 139,576 \text{ MeV}/c^2 \\ 0 & \pi^0, & m = 134,972 \text{ MeV}/c^2 \\ -1 & \pi^-, & m = 139,576 \text{ MeV}/c^2 \end{cases}$$

Hier sieht man wieder, dass die Massen der einzelnen Pionen annähernd gleich sind, wobei die Unterschiede wieder durch die elektromagnetische Wechselwirkung bedingt sind.

Für Kaonen, die in zwei Teilchen und Antiteilchen vorkommen, wird  $I = \frac{1}{2}$  zugeordnet, wie bei den Nukleonen. Auch Hyperonen (Definition siehe → Begriffslexikon) mit annähernd gleicher Masse bilden Isospin-Multipletts. Das Lambda-Teilchen erscheint alleine und ist deshalb ein Singulett, ebenso wie das Omega-Teilchen. Für die Sigma-Teilchen gibt es drei Ladungszustände und das Kaskadenteilchen ist ein Dublett.

Ermittelt wird diese Quantenzahl ganz einfach, indem man ein elektromagnetisches Feld anlegt und wie beim Zeemaneffekt anschließend die Anzahl der nicht mehr entarteten Energieniveaus zählt.

**Die G-Parität.** Schon mehrfach wurde angesprochen, dass sich die Iso-Symmetrie in völliger Analogie zur Drehimpuls-Symmetrie behandelt werden kann. Die Drehungen im Ortsraum entsprechen den Drehungen im Isospinraum, die beide jeweils dreidimensional sind. Deshalb stellt sich die Frage, ob es auch eine Parität im Isospinraum gibt. Diese Quantenzahl wurde tatsächlich nachgewiesen und es stellte sich heraus, dass eine Parität im Isospinraum auch Sinn macht. Diese wurde mit *G-Parität*  $\hat{G}$  bezeichnet.

Zur Definition der G-Parität benutzt man das Pionentriplett  $|\pi_j\rangle$  mit  $j = 1, 2, 3$ , denn es bildet einen Vektor im Isospinraum. Für  $\hat{G}$  gilt:

$$\hat{G}|\pi_j\rangle = -|\pi_j\rangle \quad (36)$$

Wählt man nun

$$\hat{G} = e^{-i\pi\hat{T}_2}\hat{C} \quad (37)$$

$$\text{mit } \hat{T}_2 = -\frac{1}{2}i(\sqrt{2}|\pi^+\rangle - \sqrt{2}|\pi^-\rangle), \pi = \begin{pmatrix} |\pi_1\rangle \\ |\pi_2\rangle \\ |\pi_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}(|\pi^+\rangle + |\pi^-\rangle) \\ \sqrt{2}(|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle) \\ |\pi_0\rangle \end{pmatrix}$$

und  $\hat{C}$  dem Ladungskonjugations-Operator (wird später noch ausführlicher besprochen, siehe Kapitel → CPT-Theorem)

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$



Für die G-Parität gilt

$$\boxed{[\hat{H}_{stark}, \hat{G}] = 0 \Rightarrow \text{G-Paritätserhaltung}} \quad (39)$$

Dieser Erhaltungssatz hat nun wiederum eine Einschränkung der Reaktionen bei starker Wechselwirkung zur Folge. So kann ein Meson mit positiver G-Parität nur in Mesonen mit ebenfalls positiver G-Parität zerfallen. Für Pionen gilt hingegen, dass das 2-Pion-System positive und das 3-Pion-System negative G-Parität besitzt. Deshalb kann ein  $\omega$ -Meson bei starker Wechselwirkung nur in 3 Pionen zerfallen!

Allen Mesonen kann man eine G-Parität zuordnen. Bei den Baryonen funktioniert das nicht, denn hier führt der G-Paritäts-Operator aus dem Multiplett hinaus und kann daher kein Symmetrieoperator sein. Bei Nukleon-Antinukleon-Systemen kann sie wieder verwendet werden, wobei sich diese Systeme entweder im Isospin-Singulett oder im Isospin-Triplett befinden können.

**Ausblick.** Laut Gell-Mann und Neeman gibt es Hinweise darauf, dass es eine größere (stark) gebrochene Symmetrie als den Isospin gibt, die  $SU(3)$ . Diese wäre eine exakte Symmetrie für  $m_u = m_d = m_s$ , wobei  $m_u$  die Masse des Up-Quarks ist,  $m_d$  die Masse des Down-Quarks und  $m_s$  die Masse des Strange-Quarks. Tatsächlich ist die Symmetrie jedoch stark gebrochen, weil gilt:  $m_s \gg m_u$ . (siehe Kapitel  $\rightarrow$  Standardmodell der fundamentalen Wechselwirkungen, Seite 95)

### Strangeness und Hyperladung

Ähnlich wie bei der Einführung der Baryonen- und Leptonenzahl, die aufgrund fehlender Reaktionen definiert wurden, wurde bei Kaonen und Hyperonen beobachtet, dass diese zwar stark erzeugt werden, jedoch schwach zerfallen. Das gab wieder den Anlass eine weitere Quantenzahl einzuführen: die *Strangeness*-Quantenzahl  $S$ . Es handelt sich wiederum um eine additive Erhaltungsgröße und es gilt

$$\boxed{\sum_i S_i = \text{const. in starker und elektromagnetischer Wechselwirkung}} \quad (40)$$

Nukleonen wird die Strangeness  $S = 0$  zugeordnet, ebenso den Leptonen, da für diese keine Strangenesszahlen definiert sind. Für eine Zuordnung zu den verschiedenen übrigen Hadronen (nur Hadronen, die aus

Strange-Quarks aufgebaut sind, haben eine Strangenesszahl  $\neq 0$ ) beobachtet man Reaktionen, die über die schwache Wechselwirkung laufen. Per Definition wird die Strangeness des positiven Kaons  $S(K^+) = 1$  gesetzt. Über die Reaktion

$$p + \pi^- \rightarrow n + K^+ + K^- \quad (S : 0 + 0 = 0 + 1 + (-1))$$

kann mit der Definition des positiven Kaons auch das negative bestimmt werden. Da auf beiden Seiten die Strangeness gleich sein muss, gilt  $S(K^-) = -1$ . Auf analoge Weise können so allen Hadronen Strangenesswerte zugeordnet werden.

Besonders interessant ist dabei die Reaktion

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

denn sie weist dem neutralen Kaon den Wert 1 zu, nachdem man weiß, dass  $\Lambda^0 = +1$  ist. Daraus ergibt sich, dass zwei Kaonen mit  $S = 1$  existieren, aber nur eines mit  $S = -1$ . Als Konsequenz dessen wurde vorgeschlagen auch dem neutralen Kaon ein Antiteilchen zuzuschreiben, welches sich nur in der Strangeness-Quantenzahl unterscheidet. Dieses Teilchen  $\bar{K}^0$  wurde auch gefunden und ist ausschlaggebend für quantenmechanische Interferenzeffekte, die im Kapitel CPT-Theorem besprochen werden.

In einigen Fällen erweist es sich als günstiger anstelle der Strangeness die *Hyperladung*  $Y$  zu verwenden. Diese ist durch die Baryonenzahl und die Strangeness definiert

$$\boxed{Y = B + S} \quad (41)$$

Der Name Hyperladung stammt daher, dass  $Y$  auch als halber Ladungsschwerpunkt definiert werden kann. Im Kapitel über den Isospin wurden die Multipletts des Isospins als Ladungsmultipletts identifiziert, da sie sich nur in ihrer Ladung (und sonstigen elektromagnetischen Eigenschaften) unterscheiden. Für jedes dieser Multipletts wird eine Ladung von  $Q_{min}$  bis  $Q_{max}$  angenommen. Es liegt im Allgemeinen jedoch der Ladungsschwerpunkt nicht bei Null (nur für Isospin-Singulets  $I = 0$ ). Vom Ladungsschwerpunkt  $\frac{1}{2}(Q_{min} + Q_{max})$  aus wird die Isospinkomponente gemessen.

$$Q = \frac{1}{2}(Q_{min} + Q_{max}) + I_3 \quad (42)$$

$$\text{mit } I_3 = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{1}{2}(Q_{max} - Q_{min}) \quad (43)$$

Es gilt

$$2I = Q_{max} - Q_{min} \quad (44)$$

Der Ladungsschwerpunkt wird mit  $\frac{1}{2}Y$  bezeichnet, was nichts anderes als die halbe Hyperladung ist. Die Relation zwischen dem Ladungsoperator und der Isospinkomponente bzw. mit der Hyperladung, die *Gell-Mann - Nishijima - Relation* genannt wird, lautet damit

$$Q = \frac{1}{2}Y + I_3 \text{ mit } T_3 = T, T - 1, \dots, -T$$

oder mit Gleichung (41)

$$Q = \frac{1}{2}(B + S) + I_3 \text{ Gell - Mann - Nishijima - Relation} \quad (45)$$

Mit Hilfe des Isospins und der Hyperladung können die Multipletts anschaulich in Diagrammen dargestellt werden. (siehe als Beispiele Abbildungen 1 und 2)

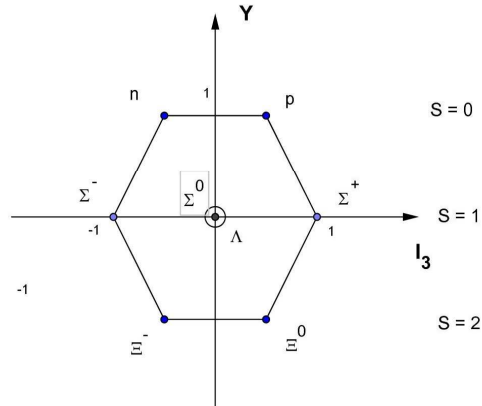


ABBILDUNG 6. Darstellung des Baryonen-Oktetts

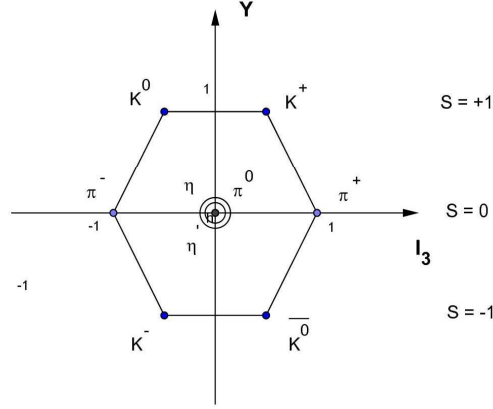


ABBILDUNG 7. Darstellung des Mesonen-Nonetts

### Das CPT-Theorem

Um über das CPT-Theorem und damit verbundenen Erkenntnissen sprechen zu können, muss man wieder zu den diskontinuierlichen Symmetrien, die schon im Kapitel über die quantenmechanischen Symmetrien vorgestellt wurden, zurückkehren. Für einen diskreten Symmetrieoperator  $\hat{U}$  gilt  $\hat{U}^2 = 1$ . Aus der Invarianz dieses Operators folgt ein multiplikativer Erhaltungssatz, d.h. das Produkt von Quantenzahlen bleibt erhalten.

**Die Eigenparität der subatomaren Teilchen.** Die Erhaltung des Paritätsoperators  $\hat{P}$ , der Raumspiegelung, in der Quantenmechanik wurde bereits gezeigt. Da jedoch Teilchenerzeugung erst mit der Quantenfeldtheorie beschrieben werden kann, machte es noch nicht viel Sinn die Eigenparität eines einzelnen Teilchens zu bestimmen. In der Teilchenphysik hingegen wird einem Teilchen über eine Eigenwertgleichung folgendermaßen Eigenparität zugeordnet:

$$\hat{P}|a\rangle = \pi_a|a\rangle \quad (46)$$

Da die Parität eine multiplikative Erhaltungsgröße ist, gilt für den Anfangszustand einer Reaktion

$$\hat{P}|Anfang\rangle = \underbrace{\hat{P}|a\rangle\hat{P}|b\rangle}_{\text{innere Wellenfunktionen}} \underbrace{\hat{P}|rel.Bewegung\rangle}_{=(-1)^l}$$

$$\pi_{Anfang} = \pi_a \pi_b (-1)^l \quad (47)$$

wobei bei  $(-1)^l$  mit  $l$  der relative Drehimpuls zwischen den beiden Teilchen gemeint ist.

Analoges gilt für den Endzustand, woraus sich die Gleichung für die gesamte Reaktion ergibt:

$$\pi_a \pi_b (-1)^l = \pi_c \pi_d (-1)^{l'} \quad (48)$$

Um alle anderen Eigenparitäten zu bestimmen wird die Eigenparität des Protons positiv definiert

$$\pi(Proton) = + \quad (49a)$$

Ähnlich wie bei der Bestimmung der Strangeness-Quantenzahl mit dem Kaon  $K^+$  kann damit den anderen Teilchen über beobachtete Reaktionen ihre Parität zugeordnet werden.

Will man nun die Parität des Neutrons bestimmen, stellt sich dabei heraus, dass diese nicht getrennt vom Pion  $\pi^-$  gemessen werden kann. Da allerdings das Proton und das Neutron ein Isoduplett bilden, kann angenommen werden, dass beide Teilchen dieselbe Parität besitzen, also

$$\pi(Neutron) = + \quad (49b)$$

Deshalb muss für das negative Pion gelten

$$\pi(Pion) = - \quad (49c)$$

und ist damit ein pseudoskalar Teilchen.

Neben dem Proton und dem Neutron wird als drittes Standardteilchen das Lambda-Teilchen verwendet ( $\pi(Lambda) = +$ ) um die Parität der anderen Teilchen zu ermitteln. Diese Festlegung ist notwendig, weil die relative Parität zweier Systeme nur messbar ist, wenn sie in den Quantenzahlen  $Q$ ,  $B$  und  $Y$  übereinstimmen. Das hängt mit ebendiesen additiven Erhaltungssätzen zusammen. ( Näheres dazu  $\rightarrow$  S. 237 Frauenfelder/Henley)

Um den Teilchen ihre Parität durch die Reaktionsgleichungen zuzuordnen zu können, muss die Paritätserhaltung vorausgesetzt werden. Jedoch wird sich zeigen, dass diese nicht in allen Wechselwirkungen erhalten bleibt. Um einen Nachweis für die Paritätserhaltung zu liefern braucht man ein Maß  $\mathcal{F}$ .

Für einen nicht entarteten Zustand  $|\alpha\rangle$  eines Systems mit beispielsweise positiver Parität gilt

$$|\alpha\rangle = |\textit{gerade}\rangle \quad (50)$$

Bleibt die Parität jedoch nicht erhalten, so schreibt man den Zustand

$$|\alpha\rangle = c|\textit{ungerade}\rangle + d|\textit{ungerade}\rangle \quad (51)$$

Das ist nun kein Eigenzustand des Paritätsoperators mehr (mit  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$  und  $c^2 + d^2 = 1$ ).

$$\hat{P}|\alpha\rangle = c|\textit{ungerade}\rangle - d|\textit{ungerade}\rangle \neq \pi|\alpha\rangle \quad (52)$$

Damit ergibt sich das Maß für die Paritätserhaltung folgendermaßen

$$\mathcal{F} = \frac{d}{c} \quad (53)$$

Bei gleicher Amplitude  $c = d$  ergibt das den maximalen Wert für  $\mathcal{F} = 1$ . Mittels eines bekannten  $\alpha$ -Zerfalls lässt sich das Maß der Paritätserhaltung ermitteln

$$|\mathcal{F}|^2 \leq 3 \times 10^{-13} \quad (54)$$

Dieses Ergebnis ist ein sehr guter Beweis für die Paritätserhaltung bei starker und auch elektromagnetischer Wechselwirkung.

Die Parität in der schwachen Wechselwirkung ist hingegen nicht erhalten. Den ersten Hinweis darauf lieferten zwei seltsame Teilchen, die Tau und Theta genannt wurden, und in jeder Hinsicht identisch zu sein schienen außer in ihrem Zerfall. Eines der beiden zerfällt in einen Zustand negativer Parität, das andere in einen Zustand positiver Parität. In einem anschließenden Experiment von Wu et.al. wurde bestätigt, dass die Parität beim  $\beta$ -Zerfall nicht erhalten ist.

$[\hat{H}_{\textit{schwach}}, \hat{P}] \neq 0 \Rightarrow \text{Paritätsverletzung bei schwacher WW}$

**Ladungskonjugation.** Zur formalen Behandlung der Teilchen - Antiteilchen - Relation wird der Ladungskonjugationsoperator  $\hat{C}$  verwendet, der das Vorzeichen aller additiven Quantenzahlen  $N$  umkehrt und den Spin und Isospin unverändert lässt. Das bedeutet nichts anderes als dass ein Teilchen durch die Ladungskonjugation in seine Antiteilchen übergeführt wird.

$$\hat{C}|N\rangle = |-N\rangle \quad (55)$$

Die Ladungskonjugation ist wie die Parität eine diskontinuierliche Symmetrie ( $\hat{C}^2 = 1$  und  $\hat{C}$  ist unitär und hermitisch). Eine Besonderheit ist jedoch, dass  $\hat{C}$  nicht immer Eigenzustände besitzen muss. Betrachtet man beispielsweise den Eigenzustand des Ladungsoperators  $\hat{Q}$  und wendet  $\hat{C}$  darauf an

$$\begin{aligned}
 \hat{Q}|q\rangle &= q|q\rangle \\
 \hat{C}|q\rangle &= |-q\rangle \\
 \Rightarrow \hat{C}\hat{Q}|q\rangle &= q\hat{C}|q\rangle = q|-q\rangle \\
 \hat{Q}\hat{C}|q\rangle &= \hat{Q}|-q\rangle = -q|-q\rangle \\
 \Rightarrow (\hat{C}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{C})|q\rangle &= q|-q\rangle + q|-q\rangle = 2q|-q\rangle = 2\hat{C}\hat{Q}|q\rangle \quad (56)
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, die beiden Operatoren kommutieren nicht und man kann deshalb im Allgemeinen keinen Zustand finden, der gleichzeitig Eigenzustand beider Operatoren ist

$$[\hat{C}, \hat{Q}] = 2\hat{C}\hat{Q}. \quad (57)$$

Analoges gilt für die Hyperladung und die Baryonenzahl. Damit können nur vollständig neutrale Teilchen ( $Q = B = Y = 0$ ) mit  $\hat{C}$  kommutieren und damit Eigenzustände von  $\hat{C}$  sein.

$$\hat{C}|N=0\rangle = \eta_c|N=0\rangle, \quad \eta_c = \pm 1 \quad (58)$$

Mittels QFT können die Ladungsparitäten der neutralen Teilchen bestimmt werden. Für das Photon ergibt sich etwa  $\eta_c(\gamma) = -1$  und für das neutrale Pion  $\eta_c(\pi^0) = 1$ .

Wie bei der Parität gilt jedoch auch für die Ladungskonjugation, dass diese bei schwacher Wechselwirkung nicht erhalten bleibt.

$[\hat{H}_{\text{schwach}}, \hat{C}] \neq 0 \Rightarrow \text{Ladungsparitätsverletzung bei schwacher WW}$

(59)

Diese Erkenntnis gewinnt man, indem man die Helizität  $\mathcal{H} = 2\frac{\vec{J} \cdot \vec{p}}{\hbar}$  (entspricht der Polarisation  $\vec{J} \cdot \vec{p}$  mit Vorfaktor  $2/\hbar$ ) des Neutrinos und des Antineutrinos (unterliegen nur der schwachen Wechselwirkung) betrachtet. Wenn die Ladungskonjugation bei der schwachen Wechselwirkung erhalten bleibt, müssten die beiden Teilchen die gleiche Helizität haben. Das ist jedoch nicht der Fall.

**Die CP-Invarianz und die neutralen Kaonen.** Die neutralen Kaonen wurden bereits im Kapitel über die Hyperladung erwähnt. Sie unterscheiden sich nur in ihrer Strangeness und ihrem Isospin (siehe Multiplett Abb.2). In der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung sind sie deshalb zwei eindeutig unterschiedliche Teilchen:

$$\begin{aligned} K^0 : \quad & I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}, S = +1 \\ \bar{K}^0 : \quad & I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}, S = -1 \end{aligned}$$

Bei schwacher Wechselwirkung bleibt die Hyperladung (und auch der Isospin) nicht erhalten. Die Teilchen können dann nicht mehr voneinander unterschieden werden. Deshalb können virtuelle schwache Übergänge zwischen den beiden stattfinden. (Virtuelle Übergänge sind Übergänge 2.Ordnung:  $K^0 \leftrightarrow 2\pi \leftrightarrow \bar{K}^0$ ), was im Folgenden gezeigt werden soll.

Ohne schwache Wechselwirkung können die beiden Kaonen wie zwei identische und von einander unabhängige Potentialtöpfe  $L$  und  $R$  behandelt werden. Tritt nun eine Störung in Form der schwachen Wechselwirkung auf, induziert diese Übergänge zwischen den beiden Potentialtöpfen:

$$\hat{H}|\psi\rangle = (\hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_{schwach})|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (60)$$

mit  $\hat{H}_0$  dem Hamiltonoperator für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung,  $\hat{H}_{schwach}$  der Störterm, die schwache Wechselwirkung und  $\lambda \ll 1$ .

Zum Finden der Eigenwerte und Eigenfunktionen des gesamten Hamiltonoperators legt man am einfachsten das Potential symmetrisch zum Ursprung. Daraus folgt die Invarianz bezüglich des Paritätsoperators  $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$  und dessen Anwendung bewirkt  $\hat{P}|L\rangle = |R\rangle$  und  $\hat{P}|R\rangle = |L\rangle$ . Die gemeinsamen Eigenfunktionen von  $\hat{P}$  und  $\hat{H}$  sind

$$|s\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|L\rangle + |R\rangle) \quad (61a)$$

$$|a\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|L\rangle - |R\rangle) \quad (61b)$$

Die Störung bewirkt eine Energieverschiebung, die durch die Eigenwerte von  $\hat{H}_{schwach}$  gegeben sind.

$$\langle s|\hat{H}_{schwach}|s\rangle = E' + \Delta E \quad (62a)$$



$$\langle a | \hat{H}_{schwach} | a \rangle = E' - \Delta E \quad (62b)$$

Wirft man nun ein Teilchen in den Potentialtopf (z.B.  $L$ ), so hat die Wellenfunktion  $|\psi(0)\rangle = |L\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|s\rangle + |a\rangle)$  keine definierte Parität und keinen Eigenzustand von  $\hat{H}$ .

Betrachtet man das Teilchenverhalten zu späterer Zeit, so muss die Zeitentwicklung der Schrödingergleichung herangezogen werden, die eine Differentialgleichung mit der Lösung

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(E_0+E)\frac{t}{\hbar}} \left( \cos\left(\frac{\Delta E t}{\hbar}\right) |L\rangle - i \sin\left(\frac{\Delta E t}{\hbar}\right) |R\rangle \right) \quad (63)$$

ergibt, wobei die Wahrscheinlichkeit für den Aufenthalt des Teilchens im Potentialtopf  $R$ :  $P(L) = \sin^2\left(\frac{\Delta E t}{\hbar}\right)$  ist, wenn das Teilchen zum Zeitpunkt  $t = 0$  in den Potentialtopf  $L$  gefallen ist. Das Teilchen oszilliert also mit einer Kreisfrequenz von  $\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \langle L | \hat{H}_{schwach} | R \rangle \frac{1}{\hbar}$  zwischen den beiden Töpfen hin und her.

Bei den Kaonen gilt im Vergleich zu den Potentialtöpfen für die ungestörten Teilchen, dass die Kaonen symmetrisch bezüglich der Ladungskonjugationsoperation liegen. (Sie sind ja ein Teilchen-Antiteilchen-Paar)

$$\hat{C} |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad (64a)$$

$$\hat{C} |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (64b)$$

Nach der Entdeckung der Paritätsverletzung wurde deutlich, dass auch  $\hat{C}$  nicht mit dem gesamten Hamiltonoperator kommutiert (siehe Kapitel  $\rightarrow$  Ladungskonjugation). Deswegen betrachtet man anstelle der einzelnen Größen die kombinierte Erhaltungsgröße  $CP$ . Für die Wirkung auf die Kaonen bedeutet das

$$\begin{aligned} \hat{P} |K^0\rangle &= -|K^0\rangle, \text{ und } \hat{P} |\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \\ \Rightarrow \hat{C} \hat{P} |K^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \quad (65a)$$

$$\hat{C} \hat{P} |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (65b)$$

Analog zu den Potentialtöpfen können die gemeinsamen Eigenfunktionen bestimmt werden

$$|K_L^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad (66a)$$

$$|K_S^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (66b)$$

Die Eigenwerte erhält man über die Eigenwertgleichung

$$\hat{C}\hat{P}|K_S^0\rangle = \underbrace{\eta_{CP}}_{+}|K_S^0\rangle \quad (67a)$$

$$\hat{C}\hat{P}|K_L^0\rangle = \underbrace{\eta_{CP}}_{-}|K_L^0\rangle \quad (67b)$$

Wie man bei den Potentialtöpfen schon gesehen hat, haben die beiden Teilchen  $|s\rangle$  und  $|a\rangle$  bzw.  $|K_S\rangle$  und  $|K_L\rangle$  unterschiedliche Energie und damit unterschiedlich lange Lebensdauern. Sie können entweder über zwei oder drei Pionen zerfallen. Gilt die  $CP$ -Erhaltung, so kann  $K_L$  nur in drei Pionen zerfallen, denn zwei Pionen haben die kombinierte Parität  $+1$  wohingegen für den Eigenwert der langlebigen Kaonen  $\eta_{CP} = -1$  gilt. Allerdings wurden in Experimenten auch Zerfälle in zwei Pionen beobachtet, weshalb die  $CP$ -Invarianz bei schwacher Wechselwirkung gebrochen wird!

In Gleichung (63) wurde die Zeitentwicklung eines Teilchens beschrieben, welches zum Zeitpunkt  $t = 0$  in den Potentialtopf geworfen wurde. Die Potentialtöpfe entsprechen nun den beiden neutralen Kaonen  $K^0$  und  $\bar{K}^0$ . Das Teilchen, das sich im Potentialtopf befindet, ist  $K_L^0$ . Nachdem alle kurzlebigen Kaonen zerfallen sind und nur mehr die langlebigen übrig sind, ergibt  $K_L^0$  ausgedrückt durch die Eigenzustände der Hyperladung unter Vernachlässigung der  $CP$ -Invarianz (die beiden Kaonen unterscheiden sich ja nur in ihrer Strangenesszahl)

$$|K_L^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

und damit besteht der langlebige Kaonenstrahl zu gleichen Teilen aus den beiden neutralen Kaonen  $K^0$  und  $\bar{K}^0$ .

**Das CPT-Theorem.** Wie gerade gezeigt wurde, ist der Zerfall des langlebigen Kaons in zwei Pionen ein Widerspruch zur  $CP$ -Invarianz. Die Entdeckung dieser gebrochenen Symmetrie steht nun in Verbindung zum *CPT-Theorem*, welches besagt, dass das Produkt der drei Operatoren  $\hat{C}$ ,  $\hat{P}$  und  $\hat{T}$  mit jedem Hamiltonoperator vertauscht.

$$\boxed{[\hat{C}\hat{P}\hat{T}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow \text{CPT-Erhaltung}} \quad (68)$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass sich ein System und ein zeit- und

raumgespiegeltes Antisystem völlig gleich verhalten. Die Reihenfolge der einzelnen Operatoren ist dabei egal.

Zwei wichtige Konsequenzen des CPT-Theorems sind, dass Teilchen und ihre Antiteilchen dieselbe Masse und Lebensdauer haben. (Weshalb auch das kurzlebige und langlebige Kaon kein Teilchen-Antiteilchenpaar sein können.)

Da kein Hinweis auf eine Verletzung dieses Theorems gefunden wurde, schloss man darauf, dass auch die Zeitumkehr keine absolute Erhaltungsgröße ist, was mittlerweile auch experimentell bestätigt wurde.

### **Eichsymmetrien, spontane Symmetriebrechung und die "Weltformel"**

Die Eichsymmetrien und Eichtransformationen wurden bereits in der klassischen Mechanik und Feldtheorie angesprochen. In der Teilchenphysik kann dieser Begriff auf die fundamentalen Wechselwirkungen angewendet werden.

Am naheliegendsten wird zunächst die Lagrangedichte der QED betrachtet, da aus der klassischen Mechanik auch der Begriff der Eichsymmetrie kommt. Die Lagrangedichte bleibt gegenüber Eichtransformationen unverändert, da auch das Potential  $A^\mu$  mittransformiert wird. Das elektromagnetische Feld ist ein masseloses Vektorfeld, welches von eben diesen Transformationen unabhängig ist.

Die QED ist eine Eichtheorie mit der Eichgruppe  $U(1)$

Diese Eichgruppe  $U(1)$  entspricht einer abelschen Symmetrie der Phasentransformation und kennzeichnet damit die elektromagnetische Wechselwirkung.

Allerdings können auch nicht abelsche Symmetrien, wie die  $SU(2)$  (die Symmetrie zwischen W- und Z- Bosonen) und die  $SU(3)$  (die Symmetrie zwischen den Farbladungen, siehe nachfolgende Kapitel) Eichsymmetrien sein (Yang, Mills, 1954). Dabei muss zu jedem Parameter der Eichgruppe, also zu jeder Noetherladung, ein masseloses Vektorfeld, ein so genanntes Eichfeld, existieren. Der Grund für die Masselosigkeit des Feldes liegt darin begründet, dass die Masse die Eichinvarianz verletzt.

### Der Higgs-Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung.

Als erste Vereinheitlichung von Wechselwirkungskräften (nach der Zusammenlegung von elektrischer und magnetischer zur Elektromagnetischen Wechselwirkung) wurden versucht die schwache( $\beta$ -Zerfall) und die elektromagnetische Wechselwirkung in einer eichinvarianten Theorie zu beschreiben. Dazu benötigt man das *Higgs-Modell* (oder auch *Higgs-Kibble Mechanismus* der eichinvarianten Massenbeschreibung). Die Reichweite der beiden Wechselwirkungen und damit die Masse der Austauschteilchen (Intermediären Bosonen) verhält sich völlig unterschiedlich. Während die elektromagnetische Wechselwirkung sehr weit reicht, ist die schwache Wechselwirkung äußerst kurzreichweitig und verlangt daher massive Austauschteilchen (indirekte Proportionalität zwischen Reichweite und Masse, siehe  $\rightarrow$  Begriffslexikon). Da die Eichinvarianz jedoch durch massive Wechselwirkungsteilchen verletzt wird, muss ein Modell gefunden werden, welches sowohl die Grundgleichungen eichinvariant lässt, als auch den Bosonen Masse zuschreibt.

Das Higgs-Modell geht nun von der Kopplung eines masselosen Vektorfeldes mit einem komplexen (geladenen) skalaren Feld  $\phi$  aus. Die Kopplung soll dabei minimal sein um möglichst nahe bei einer eichinvarianten Beschreibung zu bleiben.

Die Lagrangedichte für eine solche Wechselwirkung (hier erkennt man wieder die Relevanz der Verwendung der Lagrangefunktion/dichte, die schon in der klassischen Mechanik und klassischen Feldtheorie eingeführt wurde) lautet:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 - U(|\phi|^2) \quad (69a)$$

wobei  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ist.

Ohne Wechselwirkung vereinfacht sich die Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - U(|\phi|^2) \quad (69b)$$

Das Minimum des Potentials liegt bei  $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda e^{i\alpha}$  bzw. bei der Wahl  $\alpha = 0$  ist  $\phi_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ . Die Wahl des Phasenfaktors legt zwar eine bestimmte Phase fest, ändert jedoch die physikalische Größe (und die Lagrangedichte) nicht, weil nur reelle Größen messbar sind! Die Lagrangedichte ist damit invariant gegenüber Phasentransformationen, der Grundzustand (Vakuumswert) jedoch nicht. Das bezeichnet man als *spontane Symmetriebrechung* und führt im Higgs-Mechanismus automatisch auf masselose Teilchen, die *Goldstone-Bosonen* (masseloses Teilchen mit Spin 0).

Bindet man nun den Wechselwirkungsterm der Lagrangedichte (das

Vektorfeld  $A_\mu$  koppelt mit dem Higgsfeld  $\phi$ ) mit ein, dann verhalten sich die Vektorteilchen so, als hätten sie plötzlich Masse (gilt nur für niedrige Energien und wenn das  $\phi$ -Feld sich in der Nähe des Minimums befindet). Bei hohen Impulsübertragungen, das heißt bei viel Energie, befindet sich  $\phi$  nicht mehr im Minimum und die Vektorteilchen sind wieder masselos.

Besonders wichtig ist, dass die Eichinvarianz in Wirklichkeit nicht gebrochen, sondern verborgen ist. Die Grundgleichungen bleiben trotz besonderer Wahl der Phase invariant unter Eichtransformation und nur der Vakuumszustand verletzt die Symmetrie!

**Das Glashow-Salam-Weinberg-Modell (GSW).** Die Glashow-Salam-Weinberg-Theorie vereinigt die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung, also eine abelsche ( $U(1)$ ) und eine nicht abelsche Symmetrie ( $SU(2)$ ):

$$\boxed{SU(2) \times U(1) : \text{Eichgruppe der elektroschwachen Wechselwirkung}}$$

Den Ausgangspunkt dieser Theorie stellte zunächst die V-A Theorie der schwachen Wechselwirkung (Feynman, Gell-Mann, Marshak, Sudarshan (1958)) dar, die für die Lagrangedichte eine Mischung aus Vektorstrom und Axialvektorstrom vorschlug um die P-Verletzung zu erklären (bei der Fermi-Theorie des  $\beta$ -Zerfalls, der Vorläufertheorie, wurde nur mit Vektorströmen gearbeitet). Analog zur QED verwendet die V-A-Theorie virtuelle Teilchen (die Vektorbosonen  $W^\pm$ ) die bei der schwachen Wechselwirkung ausgetauscht werden. Im Gegensatz zur QED handelt es sich jedoch um eine Ladungsaustauschreaktion, da die Vektorbosonen nicht neutral sind. Die  $W^\pm$ -Teilchen koppeln an der Differenz aus Vektor- und Axialvektorstrom, weshalb dieses Modell auch V-A-Theorie genannt wird.

Man unterscheidet hier zwischen links- und rechtshändigen Leptonen, wobei linkshändige Leptonen einen antiparallelen Spin zum Impuls haben und rechtshändige einen parallelen. Damit kann man die folgende Einteilung der Leptonen in Dupletts und Singulets machen:

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, e_R, \mu_R, \tau_R \quad (70)$$

Neben der V-A-Wechselwirkung (geladene schwache Ströme) existiert auch noch eine weitere Art der schwachen Wechselwirkung, die durch den Austausch des Z-Bosons vermittelt wird (neutrale schwache

Ströme). Da die schwache Wechselwirkung eine sehr geringe Reichweite hat und die Reichweite indirekt proportional mit der Masse zusammenhängt, müssen die intermediären Bosonen (also die Austauschteilchen)  $W^+$ ,  $W^-$  und  $Z^0$  große Massen haben.

Die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung weisen strukturell sehr starke Ähnlichkeiten auf. Deshalb liegt die Überlegung nahe beide Wechselwirkungen mit einer Theorie zu beschreiben: der elektro-schwachen Wechselwirkung.

Allerdings ist die Photonenmasse Null (die U(1) ist ja eine abelsche Eichsymmetrie), die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung sind hingegen massiv. Deshalb startet man in der GSW-Theorie mit masselosen Bosonen, die durch den Higgs-Mechanismus effektive Masse bekommen und auch das Photonenfeld miteinbeziehen.

Zu Beginn hat man ein masseloses Isotriplett-Eichfeld  $\vec{A}_\mu = A_\mu^\alpha$  (Isospintriplett), das an die geladenen und neutralen schwachen Übergangsströme koppelt. Das Eichfeld  $A_\mu$  wird von der Forderung nach Invarianz unter der SU(2)-Symmetrie hergeleitet und muss (durch spontane Symmetriebrechung) massiv werden, um die kurze Reichweite der schwachen Wechselwirkung sicherzustellen. Daneben muss auch noch die U(1)-Symmetrie existieren und damit ein weiteres Vektorfeld  $B_\mu$  (Hyperladungssingulett), welches masselos bleiben muss, (da das Photon masselos ist). Die eigentliche Idee von Weinberg und Salam war die Einführung eines komplex-skalaren Iso-Dublettfeldes  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2/\phi_3 + i\phi_4)$ . Dabei ist der Isospin mit  $T = \frac{1}{2}$  bzw.  $T_3 = \pm\frac{1}{2}$  festgelegt. Der Hyperladung hingegen ist zu Beginn noch kein Wert zugeordnet.

Im Standardmodell der elektro-schwachen Wechselwirkung, welches SU(2) x U(1) Eichsymmetrie besitzt, muss es also vier Ströme geben; nämlich drei schwache Isospinströme  $j^{a\mu}$  ( $a = 1,2,3$ ) und einen Hyperladungsstrom  $j^{Y\mu}$ . Das heißt für die Gruppengeneratoren ( $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3, \hat{Y}$ ) muss es nach dem Noethertheorem jeweils einen erhaltenen Strom geben.

Ersetzt man das Potential durch seinen Vakuumsvalue (siehe vorheriges Kapitel), kann man durch spezielle Eichung die Phasenfaktoren wegeichen (sie sind für die physikalischen Größen nicht relevant, da nur reelle Größen messbar sind!). Durch spontane Symmetriebrechung erhalten die Felder  $A^{a\mu}$  und  $B^\mu$  Masse und sind miteinander verkoppelt. Sie entsprechen allerdings noch nicht den physikalischen Feldern. Durch Feldkombination bleibt das Photonenfeld  $A^\mu$  masselos:

$$A^\mu = \sin \theta A^{3\mu} + \cos \theta B^\mu \quad (71)$$

mit  $\theta$  als Mischungswinkel zwischen den Feldern. Das massive Z-Boson entsteht durch die orthogonale Kombination von  $A^\mu$ :

$$Z^\mu = \cos \theta A^{3\mu} - \sin \theta B^\mu \quad (72)$$

Mit der Wahl  $Y = 1$  kann die Masse der Bosonen berechnet werden:

$$M_W = \frac{e}{2^{5/4} \sqrt{G} \sin \theta} \approx 80 \text{ GeV} \quad \text{und} \quad (73a)$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta} \approx 90 \text{ GeV} \quad (73b)$$

mit  $G$  als Kopplungskonstante.

Durch die spezielle Wahl der Phase  $\Phi_0 = (0/\frac{\lambda}{\sqrt{2}})$  passiert es im Fall der  $(SU(2) \times U(1))$  Symmetrie, dass ein Teil der Symmetriegruppe ungebrochen bleibt, also dass die Phase  $\Phi_0$  durch einige Symmetrioperationen invariant gelassen wird und das Photon masselos bleibt.

**Standardmodell der fundamentalen Wechselwirkungen.** Für die Vereinigung aller fundamentalen Wechselwirkungen muss nun auch noch die starke Wechselwirkung eingebunden werden. Die starke Wechselwirkung wurde zu Beginn mit Hilfe des Quarkmodells beschrieben, in dem die Baryonen aus 3 Quarks und Mesonen aus einem Quark und einem Antiquark gebildet und durch Gluonen zusammengehalten werden. Dieses Modell führt jedoch zu einigen Problemen:

- (1) *Asymptotische Freiheit und Infrarotklaverei* Bei niedrigen Energien ist die Kopplung zwischen den Quarks und den Gluonen sehr stark (Confinement oder Infrarotklaverei genannt), bei hohen Energien ist die Kopplung jedoch schwach (asymptotische Freiheit).
- (2) *Trialitätsproblem* Obwohl es theoretisch eine Anziehung zwischen allen Quarks (und Antiquarks) geben sollte und damit gäbe es für Baryonen 81 verschiedene Bindungszustände. Bei Mesonen sollten auch Bindungen zwischen zwei Quarks und zwei Antiquarks möglich sein. Solche Realisierungen findet man jedoch nicht.
- (3) *Spin-Statistik-Problem* Baryonen müssen wegen der Fermi-Statistik eine total antisymmetrische Wellenfunktion haben. Das ist jedoch sehr untypisch für quantenmechanische Potentiale im Grundzustand.

Einen Ausweg für die letzten beiden Probleme stellt die Zuordnung einer Farbladung (ein weitere Freiheitsgrad) dar. Damit sind nur mehr 9 der möglichen 81 Quark-Kombinationsmöglichkeiten für Baryonen wirklich realisierbar und die Ortswellenfunktion ist durch die Farbladung total antisymmetrisch.

Die Lösung zum Problem der asymptotischen Freiheit und der Infrarotklaverei liefert eine energieabhängige Kopplungskonstante  $g_s(E)$ , die für unendlich große Energie gegen Null geht.

Diese neue Theorie der Farbladungen nennt man Quantenchromodynamik (QCD). Die QCD ist eine (nicht abelsche)  $SU(3)_C$  Symmetrie, also eine Symmetriegruppe, die aus 3x3-Matrizen aufgebaut ist, deren Determinante +1 ist. In den  $Y - I_3$ -Diagrammen kann die fundamentale Darstellung der  $SU(3)$  gezeigt werden (siehe Abbildung 3).

Analog zum GSW-Modell der Leptonen (siehe Gleichung 70) können auch die Quarks in Dupletts und Singletts eingeordnet werden.

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (74)$$

Diese Symmetrie zwischen Quarks und Leptonen legt eine neue Symmetriegruppe, die  $SU(5)$  nahe. Sie ist die einfachste Gruppe, die das Produkt  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  enthält und kombiniert damit alle drei fundamentalen Wechselwirkungen (der Teilchenphysik).

Im Normalfall sind Quarks und Leptonen jedoch nicht dieselben Teilchen, weshalb diese Symmetrie stark gebrochen sein muss:

Von der  $SU(5)$ -Symmetrie ausgehend verläuft die Symmetriebrechung in zwei Schritten. Zuerst wird die  $SU(5)$ -Symmetrie gebrochen, was auf die Produktgruppe der  $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$  führt. (C steht dabei für die Farbladung, I für den Isospin und Y für die Hyperladung)

$$\boxed{SU(5) \rightarrow_{GUT} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y}$$

wobei GUT die Abkürzung für die noch nicht bewiesene *Grand Unified Theory* ist, also die große Vereinheitlichung der starken und elektro-schwachen Wechselwirkung, die durch eine einzige Kopplungskonstante  $g_{GUT}$  beschrieben werden soll.

Der anschließende Schritt, der bei hohen Energien bereits bewiesen wurde, stellt damit den aktuellen Stand der Teilchenphysik dar, das *Standardmodell der fundamentalen Wechselwirkungen*:



Standardmodell der fundamentalen Wechselwirkungen

$$\underbrace{SU(3)_C}_{\text{starke WW}} \times \underbrace{SU(2)_L \times U(1)}_{\text{elektroschwache WW}} \rightarrow \underbrace{SU(3)_C \times U(1)_{\text{elm}}}_{\text{spontane Symmetriebrechung}}$$

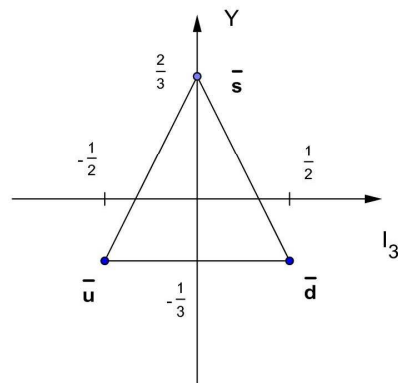
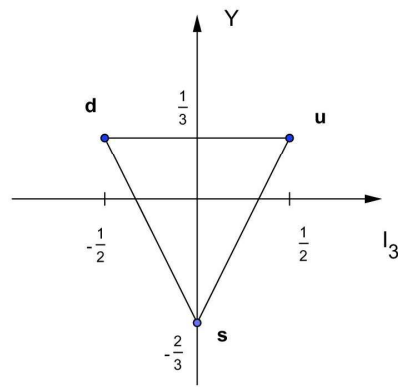


ABBILDUNG 8. Fundamentale Darstellung der  $SU(3)$

### Zusammenfassung

In der Teilchenphysik werden also weiterhin quantenmechanische Erkenntnisse weiterverwendet (Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung, diskrete Symmetrien), aber auch eine weiterentwickelte Formulierung der physikalischen Gesetze, die Quantenfeldtheorie, wird eingeführt.

Diese erfordert die Schaffung des **Teilchen-/ Antiteilchen**-Begriffs, der auch für viele weitere neue Symmetrien und Erhaltungssätze wichtig ist. Durch die Beobachtung bzw. das Fehlen von bestimmten Reaktionen werden sowohl abelsche als auch nicht-abelsche innere Symmetrien, bei denen Felder transformiert werden, eingeführt.

Die **abelschen inneren Symmetrien** lassen auf die folgenden Erhaltungssätze schließen:

- Ladungserhaltung
- Baryonenzahlerhaltung
- Leptonenzahlerhaltung (separate Elektronen-, Myonen- und Tauonenzahl!)

Die **nicht-abelschen Symmetrie** zwischen Protonen und Neutronen leitet ein Analogon zur Drehimpulserhaltung her:

- Isospin (Neutron und Proton als verschiedene Zustände eines Teilchens)
- G-Parität (Parität des Isospins)

Eine weitere neue Erhaltungsgröße ist die **Strangeness** oder als Alternative die **Hyperladung**, die als Ladungsschwerpunkt zu verstehen ist.

Die bereits in der Quantenmechanik vorkommenden diskreten Symmetrien haben in der Teilchenphysik eine wichtige Bedeutung. Neben der Parität und der Zeitumkehr existiert auch eine dritte diskontinuierliche Symmetrie, die **Ladungskonjugation**. Das Produkt dieser drei Operationen CPT bleibt erhalten, was das **CPT-Theorem** besagt. Dennoch wird das Produkt CP bei den neutralen Kaonen verletzt und damit ist auch die Zeitumkehr keine absolute Erhaltungsgröße mehr, sondern wird vielmehr durch die schwache Wechselwirkung gebrochen.

Das Prinzip der Symmetriebrechung spielt besonders bei der **Vereinheitlichung der fundamentalen Wechselwirkungen** eine entscheidende Rolle. Die drei Wechselwirkungskräfte können durch die  $U(1)$ ,  $SU(2)$  und  $SU(3)$  Symmetrien beschrieben werden:

- $U(1)$ - Symmetrien sind Symmetrien in der Phasentransformation und kennzeichnen die elektromagnetische WW
- $SU(2)$  beschreibt die Symmetrie zwischen den W- und Z-Bosonen und kennzeichnet die schwache WW
- $SU(3)$  beschreibt die Symmetrie zwischen den drei Farbladungen und kennzeichnet die starke WW

Durch **spontane Symmetriebrechung**, die durch den **Higgs-Mechanismus** beschrieben wird, erhalten die intermediären Bosonen der schwachen Wechselwirkung bei der Vereinheitlichung von schwacher und elektromagnetischer Kraft Masse, die Photonen bleiben hingegen masselos. Das wird im **Glashow-Salam-Weinberg-Modell** beschrieben.

In der **Grand Unified Theory**, der Vereinheitlichung aller drei fundamentalen Wechselwirkungen, erklärt die spontane Symmetriebrechung wie von der  $SU(5)$  auf das Produkt  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  geschlossen werden kann und davon wiederum durch spontane Symmetriebrechung auf das Produkt  $SU(3)_C \times U(1)_{elm}$ .

Damit zeigen sich sowohl die Einführung des Symmetriebegriffs und der Erhaltungssätze als auch die Symmetriebrechung als wichtiges Hilfsmittel zur Formulierung der "Weltformel", einer Vereinheitlichung aller Wechselwirkungskräfte (elektro-schwache, starke Wechselwirkung und Gravitation)



# Symmetrien und Erhaltungssätze im Physikunterricht



## Wozu Symmetrien und Erhaltungssätze im Physikunterricht?

Im ersten, sehr theoretischen, Teil wurde gezeigt, dass Symmetrien und Erhaltungsgrößen eine entscheidende Rolle bei der Vereinigung aller fundamentalen Wechselwirkungskräfte spielen. Doch welche Relevanz hat dieses Wissen nun im Physikunterricht?

In den meisten Fällen sind die bis jetzt verwendeten Formulierungen für den Schulgebrauch viel zu kompliziert und umfangreich, jedoch stellen die (vereinfachten) Erkenntnisse über Symmetrien und Erhaltungssätze die wichtigsten Kernpunkte des Oberstufenphysikunterrichts dar. Im Physiklehrplan ist festgehalten:

*”Die spezielle Methodik der Physik hat zu den Konzepten geführt, von denen folgende besonders wichtig und fächerübergreifend zu behandeln sind:*

*Denken in Modellen; Kausalitätskonzept; Naturgesetze und ihre Grenzen; Vorhersagbarkeit über das Verhalten eines Systems; Universelle Gültigkeit der Naturgesetze; Teilchenkonzept; Trägheitskonzept; Energiekonzept; **Konzept der Erhaltungsgrößen**; Feldkonzept; Konzept von Raum und Zeit”*

[Österreichischer Physiklehrplan S.3]

Neben dem explizit genannten *Konzept der Erhaltungsgrößen* lassen sich die Methoden, verwendeten Begriffe und Erkenntnisse, die im ersten Teil der Diplomarbeit besprochen wurden, in allen anderen angeführten Punkten wiederfinden. So ist es beispielsweise ohne ein Energie-, Teilchen- oder Feldkonzept (fast) unmöglich Energie-, Ladungs- oder Baryonenzahlerhaltung herzuleiten. Genauso spielen das Kausalitätsprinzip, das bei allen betrachteten Wechselwirkungen bedacht werden muss, und die Vorhersagbarkeit über das Verhalten eines Systems eine Rolle, da ansonsten eine Formulierung von Wechselwirkungskräften und damit von Symmetrien und Erhaltungssätzen unnötig wäre.

Zusammenfassend kann man von zwei grundlegenden Konzepten im Physikunterricht sprechen, die sich durch alle Schulstufen zieht:

- Erhaltungsgrößen - speziell im Schulunterricht die Energieerhaltung
- fundamentale Wechselwirkungen

In der Unterstufe steht der Energiebegriff im Vordergrund, wobei auch schon Wechselwirkungskräfte angesprochen werden (Elektrizitätslehre, Gravitation). In der Oberstufe wird das Energiekonzept erweitert und vertieft und auch die schwache und die starke Wechselwirkung besprochen.

Wie nun die beiden grundlegenden Konzepte der Erhaltungsgrößen und der fundamentalen Wechselwirkungen auch in der Schule in Verbindung miteinander gebracht werden könnten, soll im Folgenden beschrieben werden.



## Der Isospin im Physikunterricht

### Was sind die Lernziele oder wieso sollte der Isospin im Unterricht überhaupt vorkommen?

Die Einführung des Isospins im Physikunterricht bietet eine gute Möglichkeit den Begriff der *Symmetrien* mit dem der *Erhaltungsgrößen* und dem der *fundamentalen Wechselwirkungskräften* zu *verknüpfen*, was das Hauptziel des Unterrichts sein sollte. Einerseits lässt sich diese Quantenzahl nämlich sehr konkret und plastisch darstellen (Isobaren-spin: Was sind Isobare?, Protonen und Neutronen als unterschiedliche Ausführungen ein und desselben Teilchens, des Nukleons), andererseits kann man anhand dieses Konzepts den *Vektorbegriff vertiefen* und all-gemeinere Zusammenhänge herstellen.

Im Gegensatz zu anderen Kapiteln der Teilchenphysik, die oft sehr stark ins Erzählerische abgleiten, lassen sich hier mathematische und physikalische Inhalte auch für Schüler verständlich verknüpfen ohne dabei zu oberflächlich auf die semantische Bedeutung zu fokussieren oder sich zu abstrakt in mathematischen Formulierungen und Mechanismen zu verlieren.

Auch kann bei diesem Thema die *Anwendung* des Gelernten, in Form von Reaktionsgleichungen oder Bestimmung von Isospinzahlen einzelner Teilchen bzw. mittels Isospin der Ladung, sinnvoll eingebaut werden.

### Wann kann der Isospin im Unterricht eingebaut werden?

Der Begriff des Isospins ist eine Teil der Teilchenphysik und ist im Lehrplan damit erst für die 7. und 8. Klasse Oberstufe gedacht. Da mathematische und physikalische Konzepte bei den Schülern vorausgesetzt werden müssen, macht es auch wenig Sinn dieses Thema früher zu behandeln. Konkret werden folgende Punkte im Lehrplan angesprochen, die das Thema Isospin abdeckt:

” - *bisher entwickelten methodischen und fachlichen Kompetenzen vertiefen und darüber hinaus Einblicke*

*in die Theorieentwicklung und das Weltbild der modernen Physik gewinnen*

*- Einsichten in kernphysikalische Grundlagen (Aufbau und Stabilität der Kerne, ...) gewinnen und ... "*

[Österreichischer Physiklehrplan S.3/4]

Explizit wird die Einführung des Isospins im Lehrplan natürlich nicht genannt, weshalb sich dieses Thema speziell für vertiefenden oder erweiternden Unterricht oder für ein Wahlpflichtfach eignet.

Wann dieses Kapitel konkret behandelt werden sollte/kann hängt vom Lehrenden ab und sollte nur das notwendige Vorwissen der Schüler berücksichtigen. (siehe nächstes Kapitel → Welches Vorwissen ist notwendig?)

### **Welches Vorwissen ist notwendig?**

Um den Begriff des Isospins im Unterricht sinnvoll erklären und verwenden zu können, ist es entscheidend, dass die Schüler mit bestimmten physikalischen Konzepten, Gesetzen und Vorstellungen vertraut sind:

- (1) Eine wichtige Rolle spielt der Atom- und Kernaufbau und die Begriffe des Protons und Neutrons, die schon seit der dritten Klasse Unterstufe bekannt sein sollten.
- (2) Außerdem ist auch der Begriff des Drehimpulses und des Spins und deren Handhabung von Bedeutung. Der Spinbegriff muss dabei nicht unbedingt bekannt sein. Wurde diese Bezeichnung allerdings schon verwendet, so erleichtert das die Einführung des Isospins.
- (3) Grundlagen über elektromagnetische Phänomene müssen ebenfalls vorausgesetzt werden können.
- (4) Auch die Thematik der Wechselwirkungen sollte bereits angesprochen worden sein und natürlich auch das Konzept der Erhaltungsgrößen.
- (5) Verständnis über die Grundideen der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik sollte vorhanden sein.

### Motivation - Wieso beschäftigt man sich mit Erhaltungsgrößen?

Bevor mit dem Thema Isospin begonnen werden kann, sollte den Schülern klar gemacht werden, wieso man sich eigentlich dafür interessiert Symmetrien und Erhaltungssätze zu finden und zu beschreiben. Die meisten Erhaltungssätze wurden deshalb formuliert, weil man bei Experimenten Beobachtungen machte, die in der Theorie nicht vorhergesagt wurden oder weil Reaktionen nicht stattfanden, die theoretisch möglich wären. Auf diesem Weg wurden in der Teilchenphysik beispielsweise die Baryonenzahl, die Leptonenzahl und die Strangenessquantenzahl eingeführt.

Warum beschäftigt man sich mit diesen Quantenzahlen, also Erhaltungsgrößen, dann jedoch noch weiter?

Mit der Formulierung und der Untersuchung von Gemeinsamkeiten von Symmetrien und Erhaltungssätzen versuchen die Physiker die einzelnen Beschreibungen zu vereinheitlichen und schließlich als Endziel in einer Formel, der "Weltformel", auszudrücken, mit der alle physikalischen Ereignisse beschrieben und vorhergesagt werden können.

### Wie kann vorgegangen werden?

Im Folgenden soll ein kurzer Lernpfad zum Thema Isospin im Physikunterricht in möglichst einfacher Formulierung erläutert werden. Die für die Schüler erforderlichen Erklärungen und der Aufbau sollen im nächsten Kapitel beschrieben werden, der Lernpfadlink ist im Literaturverzeichnis zu finden, der didaktische Kommentar (siehe Seite 112f) und der Arbeitsplan (siehe Seite 114f) für die Schüler sind im Anhang angegeben.

**Vom Drehimpuls zum Spin.** In der Mechanik haben wir von der Erhaltungsgröße des Drehimpulses oder auch Bahndrehimpulses  $\vec{L}$ , dem Pendant bei Rotationen zum Impuls bei Translationen, gesprochen.

Zur Wiederholung dient das folgende Applet (siehe Seite 116 im Anhang), das noch einmal den Zusammenhang zwischen Radius, Tangentialgeschwindigkeit und Drehimpuls herstellt.

Um daraus zur allgemeinen (noch klassischen) Definition des Drehimpulses und der quantenmechanischen Formulierung zu kommen, dient der nachfolgende Lückentext (siehe Seite 117).

In der Teilchenphysik gibt es nicht nur den Drehimpuls alleine, sondern auch einen inneren Drehimpuls, der Spin  $\vec{S}$  genannt wird. Der innere Drehimpuls ist nun nicht mehr als "tatsächliche" Drehung zu

verstehen, sondern als abstraktes Konzept mit dem allerdings genauso gerechnet werden kann, wie mit dem Bahndrehimpuls, und das dieselben reellen Auswirkungen im Experiment zeigt.

Um den Spin-Begriff zu erläutern wird im Lernpfad eine kurze Informationseinheit (siehe Seite 118) eingeschoben.

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  wird durch die Summe aus Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  und Spin  $\vec{S}$  beschrieben und ebenfalls in einer Grafik (siehe Seite 119) einfach und übersichtlich dargestellt (Vektoraddition sollte in der Oberstufe bekannt sein).

Abschließend wird das Vorwissen über Erhaltungsgrößen und Drehimpuls zusammen mit den neuen Informationen über den Spin und Gesamtdrehimpuls kurz in einem Quiz wiederholt (siehe Seite 120f).

**Entartung und Zeemaneffekt.** Dieses Kapitel kann als Ergänzung und Vorarbeit für den Begriff der Symmetriebrechung verstanden und deshalb gegebenenfalls auch weggelassen werden. In zwei Folien wird kurz Entartung und Zeemaneffekt erklärt (siehe Seite 122f).

**Der Begriff Isobarens핀 oder kurz Isospin.** Das Konzept des Isospins oder Isobarenspins geht auf den des Drehimpulses und des Spins zurück. Um jedoch verstehen zu können wie diese Begriffe zusammenhängen, muss zuerst geklärt werden woher der Name "Isobarens핀" überhaupt kommt.

Begonnen wird mit dem aus dem Unterstufenunterricht bzw. dem Chemieunterricht bekannten Begriffen der Isotope und Isobare, die wiederum kurz und anschaulich in einem Applet (siehe Seite 124f) zusammengefasst sind.

Die Erkenntnisse über Isobare und Isotope werden wieder in einem Lückentext (siehe Seite 126) zusammengefasst.

**Vom Spin zum Isospin.** Die von Werner Heisenberg 1932 eingeführte Bezeichnung Isospin geht von der Idee aus, dass Neutronen und Protonen zwei Zustände desselben Teilchens, des Nukleons, sind. Das ist ein wichtiges und erfolgreiches Konzept in der Physik, das für die Schüler neu ist. Der Isospin lässt sich auch mathematisch beschreiben und ist für die Schüler in einer Informationseinheit (siehe Seite 127) zusammengefasst.

Der Zusammenhang bzw. Unterschied zwischen Ortsraum und Isospinraum wird in einer Grafik (siehe Seite 128) dargestellt.

Die dritte Komponente  $I_3$  des Isospins entscheidet nun darüber ob ein Nukleon ein Proton oder ein Neutron ist, was sowohl als kurzer Text als auch als Grafik veranschaulicht wird (siehe Seite 129).

Zur Vertiefung folgen noch zwei einfache Übungen zur Isospinaddition (siehe Seite 130).

**Der Isospin und die Ladung.** Aus der Unterstufe wissen die Schüler, dass Protonen und Neutronen unterschiedlich geladen sind. Das Proton positiv und das Neutron neutral. Das lässt sich auch mit Hilfe der Ladungsformel für den Isospin erklären (siehe Seite 131). Mit Hilfe der verallgemeinerten Formel (siehe Seite 132f) für die Ladung können die Schüler nun den Isospin einiger Elementarteilchen ermitteln (siehe Seite 133).

**Der Isospin und die Masse.** Damit wäre geklärt wieso die beiden Nukleonen unterschiedliche Ladungen tragen. Eine weiter bekannte Eigenschaft, die die beiden Teilchen nicht gemeinsam haben, ist ihre Masse. Das Neutron ist ein wenig schwerer als das Proton (siehe Seite 134).

Die Erklärung dafür wird auf der nächsten Seite im Zusammenhang mit der elektromagnetischen Wechselwirkung gegeben (siehe Seite 135).

Über die Massendifferenz werden die Schüler also zur Verletzung des Erhaltungssatzes für den Isospin geführt. Damit lassen sich einige Beispiele zur Überprüfung der Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung (siehe Seite 136) und Aufgaben für die Schüler (siehe Seite 137) finden.

Weiters wird nun die absolute Gültigkeit der Erhaltung der dritten Komponente des Isospins auf einer Folie verdeutlicht (siehe Seite 138) und in einer Übung (siehe Seite 138) vertieft.

**Der Isospin und die starke Wechselwirkung.** Die starke Wechselwirkung ist jene Kraft, die die Nukleonen zusammenhält. Sie unterscheidet somit nicht zwischen Proton und Neutron, sondern wirkt zwischen allen Nukleonen.

Entscheidend ist dabei, dass die dritte Komponente des Isospins auch in Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten bleibt (siehe Seite 139).

Danach werden die Begriffe Gluonen (siehe Seite 140) und weiters Quarks (siehe Seite 141f) erklärt.

Ebenso wie zuvor mit dem Isospin wird nun mit Hilfe der Quarks die unterschiedliche Ladung der Nukleonen erklärt (siehe Seite 143) und auf zwei Bsp.e (siehe Seite 144) angewendet.

Auch die Massendifferenz wird nochmals kurz angesprochen (siehe Seite 145).

### **Ausblick**

Die unterschiedliche Masse der Protonen und Neutronen wird zum Ausgangspunkt für die Masse der Austauschteilchen genommen (siehe Seite 145).

Danach wird das Higgs-Teilchen beschrieben (siehe Seite 146).

Mit dem Higgs-Teilchen kann dann die Vereinheitlichung der fundamentalen Kräfte (siehe Seite 147) und die "Weltformel" (siehe Seite 148) angesprochen werden.

Mit einer Zusammenfassung in Form eines Kreuzworträtsels (siehe Seite 149) wird der Lernpfad beendet und den Schülern der Zusammenhang zwischen Symmetrien, Erhaltungsgrößen und Wechselwirkungskräften näher gebracht worden sein.

# Anhang

# Didaktischer Kommentar:

Dieser Lernpfad ist dafür vorgesehen in das neue Kapitel "Isospin und fundamentale Wechselwirkungen" einzuführen!

## Wieso sollte dieser Lernpfad im Unterricht gemacht werden?

- Die Einführung des Isospins im Physikunterricht bietet eine gute Möglichkeit den Begriff der *Symmetrien* mit dem der *Erhaltungsgrößen* und dem der *fundamentalen Wechselwirkungskräften* zu verknüpfen.
- Einerseits lässt sich diese Quantenzahl nämlich sehr konkret und plastisch darstellen (Isobarensピン: Was sind Isobare?, Protonen und Neutronen als unterschiedliche Ausführungen ein und desselben Teilchens, des Nukleons), andererseits kann man anhand dieses Konzepts den *Vektorbegriff vertiefen* und allgemeinere Zusammenhänge herstellen.
- Im Gegensatz zu anderen Kapiteln der Teilchenphysik, die oft sehr stark ins Erzählerische abgleiten, lassen sich hier *mathematische und physikalische Inhalte auch für Schüler verständlich verknüpfen* ohne dabei zu oberflächlich auf die semantische Bedeutung zu fokussieren oder sich zu abstrakt in mathematischen Formulierungen und Mechanismen zu verlieren.
- Auch kann bei diesem Thema die *Anwendung* des Gelernten, in Form von Reaktionsgleichungen oder Bestimmung von Isospin zahlen einzelner Teilchen bzw. mittels Isospin der Ladung, sinnvoll eingebaut werden.

## Schulform/Schulstufe:

Dieser Lernpfad ist für die siebte/achte Klasse AHS gedacht.

## Lerninhalt:

Der Lernpfad "Isospin und die fundamentalen Wechselwirkungen" behandelt die Themen

- Spin
- (Entartung)
- Isospin
- Starke Wechselwirkung (Gluonen, Quarks)
- Vereinheitlichung von fundamentalen Wechselwirkungskräften

Explizit wird die Einführung des Isospins im Lehrplan nicht genannt, weshalb sich dieses Thema speziell für vertiefenden oder erweiternden Unterricht oder für ein Wahlpflichtfach eignet.

## Lernziele:

Die Schüler/innen sollen nach diesem Lernpfad in der Lage sein den Zusammenhang zwischen Symmetrien, Erhaltungsgrößen und Wechselwirkungskräften ansatzweise zu verstehen.



Durch den Lernpfad wird das selbständige Arbeiten und der Umgang mit dem Computer geschult.

**Umfang der Unterrichtsstunden:**

Für den Lernpfad sollten mindestens drei Unterrichtseinheiten eingeplant werden.

**Beschreibung eines möglichen Unterrichtsverlaufs:**

Nach dem kurzen Besprechen des Arbeitsplanes stehen die gesamten Unterrichtseinheiten den Schüler/innen zur freien Einteilung ihrer Arbeitsaufträge zur Verfügung. Dabei ist am Arbeitsplan vermerkt, wie viel Zeit ungefähr für eine bestimmte Übung eingeplant werden sollte. Die Reihenfolge der Übungen ist nicht optional.

**Angaben zur Dokumentation der Schüler/innen:**

Im Arbeitsplan ist genau vorgegeben, was und wie die Schüler/innen dokumentieren sollen. Teils sollen Erkenntnisse ins Heft übertragen werden, teils genügt das Bearbeiten am PC mit kurzer Lehrerkontrolle.

**Inhaltliche Voraussetzungen:**

Um den Begriff des Isospins im Unterricht sinnvoll erklären und verwenden zu können ist es entscheidend, dass die Schüler/innen mit bestimmten physikalischen Konzepten, Gesetzen und Vorstellungen vertraut sind:

- Grundideen der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik
- Konzept der Erhaltungsgrößen
- Atom - und Kernaufbau, der Begriff Proton/ Neutron
- Drehimpuls
- Elektromagnetismus

**Technische Voraussetzungen:**

Die Schüler/innen sind mit dem Umgang der verwendeten Computerprogramme vertraut und die Programme auf den Rechnern der Schule installiert.

**Benötigte Software:**

Benötigt wird Firefox, Internetexplorer (oder ähnliches).

Weiters sollte das Programm Geo Gebra installiert sein. (Kostenloser Download auf [www.geogebra.at](http://www.geogebra.at))

**Warum wird hier welche Software eingesetzt?**

Durch den Einsatz des PC kann der sonst sehr theoretische Stoff mit Grafiken, Internetrecherchen, Quiz, Zuordnungsübungen und Kreuzworträtseln aufgelockert und interessanter gestaltet werden.

Das Programm Hot Potatoes ist dabei besonders für Wiederholungsübungen und Zusammenfassungen geeignet. GeoGebra bietet sich für alle graphischen Konstruktionen und Darstellungen an.

# Arbeitsplan

Dieser Arbeitsplan gibt dir einen Überblick über den Umfang des Lernpfades und wie viel Zeit du für die einzelnen Übungen einplanen solltest.

Schreibe, wenn verlangt, deine Überlegungen und Erkenntnisse auf (mit Titel der Übung)!

<b>Titel</b>	<b>Beschreibung</b>	<b>Arbeitsweise (Partner/Gruppe/Allein)</b>	<b>Pflicht/ Bonus</b>	<b>Kontrolle</b>	<b>Ungefähre Zeit</b>
Drehimpuls bei Kreisbewegung	Applet mit kurzer Notiz	A	P	Abgabe der Notiz	5 min.
Der Drehimpuls	Lückentext ausfüllen	A	P	Selbstkontrolle	3 min.
Der Spin	Text zum Durchlesen	A	P		5 min.
Gesamtdrehimpuls	Grafik und kurzer Text	A	P		2 min.
WH Drehimpuls	Quiz	A	P	Selbstkontrolle	5 min.
Entartung	Text zum Lesen mit Bild	A	B		3 min.
Zeemaneffekt	Text zum Lesen	A	B		2 min.
Isotope	Applet	A	P		2 min.
Isobare	Applet	A	P	Abgabe der Notiz	3 min.
Der Begriff Isospin	Lückentext	A	P	Selbstkontrolle	3 min.
Vom Spin zum Isospin	Text zum Lesen	A	P		5 min.
Isospinraum	Grafik	A	P		2 min.
<b>ENDE erste Unterrichtseinheit</b>					
Dritte Komponente des Isospins	Text zum Lesen und Grafik	A	P		5 min.
Übungen zur Isospinaddition	Kurze Übung im Heft	P	P	Abgabe der Notiz	3 min.
Isospin und Ladung	Text und kurze Rechnung	A/P	P	Abgabe der Notiz	5 min.

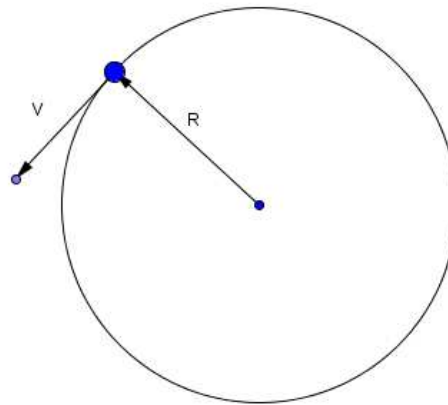
Verallgemeinerung	Text und Quiz	A	P	Selbstkontrolle und Abgabe der Notiz	5 min.
Isospin und Masse	Text zum Lesen	A	P		2 min.
Isospin und elektromagnetische WW	Text zum Lesen	A	P		3 min.
Isospin erhaltung	Text zum Lesen	A	P		5 min.
Übung zur Isospinerhaltung	Quiz	A	P	Selbstkontrolle und Abgabe der Notiz	5 min.
Erhaltung der 3.Komponente	Text zum Lesen	A	P		2 min.
Übung dazu	Zuordenübung	A	P	Selbstkontrolle und Abgabe der Notiz	5 min.
<b>ENDE zweite Unterrichtseinheit</b>					
Isospin und starke WW	Text und Internetrecherche	A/P	P	Abgabe der Notiz	10 min.
Die Gluonen	Text und Link	A/P	P	Abgabe der Notiz	5 min.
Die Quarks	Text und Appket	A	P		5 min.
Quarks und Ladung	Text	A	P		2 min.
Pionenladung	Zuordenübung	A	P	Selbstkontrolle	2 min.
Kaonenladung	Zuordenübung	A	P	Selbstkontrolle	2 min.
Quarks und Masse	Text zum Lesen	A	P		2 min.
Masse der Austauschteilchen	Text zum Lesen	A	P		2 min.
Higgs-Teilchen	Text zum Lesen	A	P		2 min.
Vereinheitlichung von Kräften	Text und Link	A/P	P	Abgabe der Notiz	5 min.
Weltformel	Text und Link	A/P	P	Abgabe der Notiz	5 min.
Zusammenfassung	Kreuzworträtsel	A	P	Lehrerkontrolle	5 min.

## Drehimpuls bei Kreisbewegung

Zur Wiederholung beginnen wir mit einer Kreisbewegung. Gegeben ist der Radius  $R$  und die Geschwindigkeit  $V$  einer Kreisbewegung.

Der Betrag des Drehimpulses  $L$  ist links oben angegeben.

$$L = 9.49$$



Ziehe nun am Punkt auf dem Kreis um den Radius  $R$  so zu verändern, dass der Drehimpuls  $L$  ungefähr 6 ist.

Verändere anschließend die Geschwindigkeit  $V$  beliebig und passe wiederum den Radius so an, dass der Drehimpuls wieder  $L$  ungefähr 6 ergibt.

Wiederhole diesen Vorgang mindestens zwei Mal.

Was fällt dir auf? Welchen Zusammenhang kann man zwischen den drei Größen Radius  $R$ , Geschwindigkeit  $V$  und Drehimpuls  $L$  erkennen?

# Der Drehimpuls

Ergänze die Lücken durch die korrekten Begriffe bzw. Formeln.

Der Drehimpuls bei der Kreisbewegung:

Der Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Radius ist  proportional.

Der Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Tangentialgeschwindigkeit ist  proportional.

Der Zusammenhang zwischen Radius und Tangentialgeschwindigkeit ist  proportional.

Damit kann man für den Zusammenhang zwischen Drehimpuls, Radius und Tangentialgeschwindigkeit (und Masse, die in den vorherigen Fällen konstant war) schreiben:

$$L = m \cdot \text{$$

Die Formel für den allgemeinen Drehimpuls lautet (in vektorieller Form):

$$L = m \cdot \text{} \text{ bzw. mit dem Impuls formuliert: } L = \text{} .$$

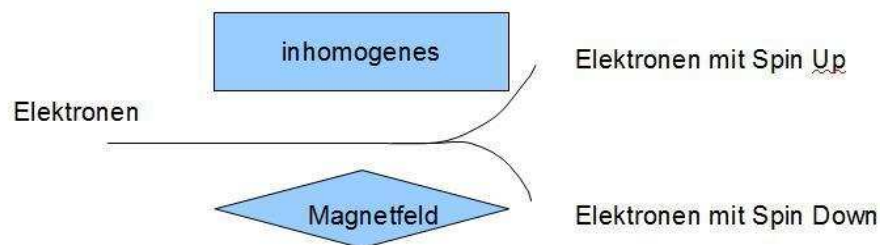
Die quantenmechanische Formulierung entspricht der klassischen mit dem Unterschied, dass der Radius  $r$  und der Impuls  $p$  Operatoren sind!

## Der Spin

Als *Spin* bezeichnet man den *inneren Drehimpuls* eines Teilchens. Im Gegensatz zum Bahndrehimpuls (also des Drehimpulses beispielsweise der Bewegung der Erde um die Sonne) kann man ihn sich nicht als tatsächliche Drehung vorstellen. Vielmehr wird er als abstrakter Begriff verwendet, mit dem man allerdings wie mit einem Drehimpuls rechnen kann.

Die eigentliche Entsprechung/Ausdruck des Spins ist das *magnetische Moment*, also kein mechanisches, sondern ein elektromagnetisches Konzept, die aufgrund des *Stern-Gerlach Experiments* (siehe Abbildung) eingeführt wurde:

Bei diesem Experiment wurden Elektronen durch ein inhomogenes Magnetfeld geschickt. Dabei stellte man fest, dass ein Teil der Elektronen vom Magnetfeld nach oben und der andere Teil nach unten abgelenkt wurden.

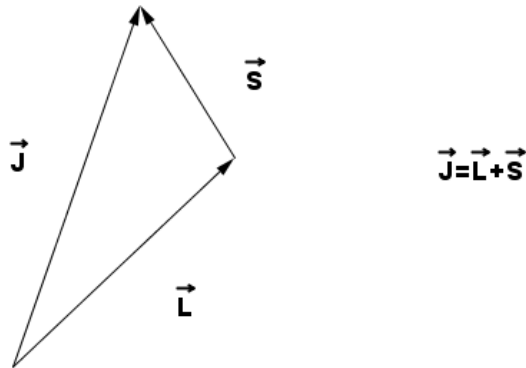


Die Erklärung lieferte die Einführung einer weiteren Größe, des Spins, der zum vorhandenen Magnetfeld noch ein inneres magnetisches Moment dazu addiert. Je nachdem ob sich die Elektronen im Spin Up oder im Spin Down Zustand befinden, werden sie nach oben oder nach unten abgelenkt.

## Gesamtdrehimpuls

Der Spin  $S$  ergibt nun zusammen mit dem Bahndrehimpuls  $L$  den Gesamtdrehimpuls  $J$ .

Die Addition erfolgt ganz einfach wie aus der Vektorrechnung bekannt und ist in der Grafik nochmals dargestellt.



## Wiederholung – Drehimpuls

Schreibe die richtigen Antworten in dein Heft!

1. Der Spin wurde in welchem Experiment entdeckt?

- a. ☐ Spin-Experiment
- b. ☐ Michelson und Morley
- c. ☐ Stern-Gerlach

Kontrolle

---

2. Womit hängt der Spin zusammen?

- a. ☐ Mit dem magnetischen Moment.
- b. ☐ Mit dem Schwerpunkt.
- c. ☐ Mit dem elektrischen Moment.
- d. ☐ Mit der Impulserhaltung.

Kontrolle

---

3. Der Gesamtdrehimpuls ist die Summe aus ...

- a. ☐ innerem Drehimpuls und Bahndrehimpuls.
- b. ☐ Bahndrehimpuls und Spin.

Kontrolle

---

4. In einem System, das gegenüber Rotation invariant ist, gibt es welche Erhaltungsgröße?

- a. ☐ Schwerpunkt
- b. ☐ Drehimpuls
- c. ☐ Energie
- d. ☐ Impuls

Kontrolle

---



5. Wann spricht man von einer Erhaltungsgröße  $E$ ?

- a. ☐ Wenn jede der Teilgrößen  $E_1, E_2, \dots$  immer denselben Wert hat.
- b. ☐ Wenn die Summe der Teilgrößen  $E_1 + E_2 + \dots = E$  immer denselben Wert hat.

Kontrolle

---

6. Als Spin bezeichnet man ...

- a. ☐ den äußeren Drehimpuls.
- b. ☐ den Gesamtdrehimpuls.
- c. ☐ den Bahndrehimpuls.
- d. ☐ den inneren Drehimpuls.

Kontrolle

# Entartung

Da der Drehimpuls eine vektorielle Größe ist, kann er in unterschiedliche Richtungen zeigen. Der Betrag der Vektoren kann dennoch gleich groß sein.

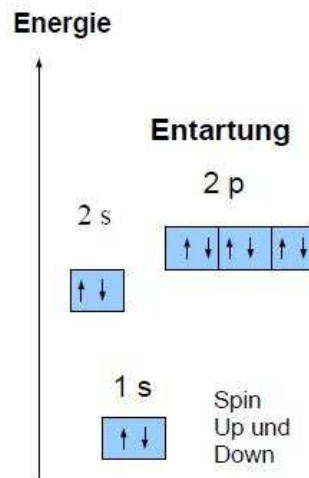
Die Energie wird mit dem Betrag des Drehimpulsvektors berechnet und kann deshalb für alle Richtungen gleich groß sein. Das ist gerade der Fall bei *Entartung*: Es existieren mehrere Zustände die denselben Energiewert aufweisen.

Zu jedem Drehimpulswert  $j$  gibt es  $(2j + 1)$ -fach *entartete Zustände*.

In der Chemie wird diese Tatsache dazu benutzt um zu bestimmen wieviele Elektronen sich in der Valenzschale befinden.

Das bedeutet, dass bei einem Gesamtdrehimpuls von  $j = 1/2$  in der ersten Schale 2 Zustände vorkommen können, ein Elektron mit Spin Up und eines mit Spin Down.

In der zweiten Schale sind insgesamt  $2(2 \cdot 3/2 + 1) = 8$  (Faktor 2: 2. Schale,  $j = 3/2$  Gesamtdrehimpuls). In der dritten Schale können sich dann 18 Elektronen aufhalten ( $3(2 \cdot 5/2 + 1) = 18$ ).



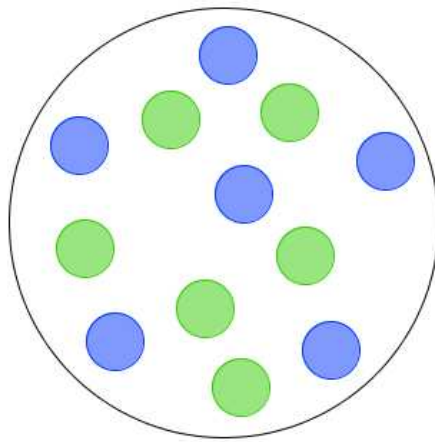
## Zeemaneffekt

Legt man jetzt allerdings ein *magnetisches Feld* an, so wird die *Entartung aufgehoben*. Das magnetische Feld stört die Beibehaltung der Entartung und hat zur Folge, dass die zuvor entarteten Zustände nun unterschiedliche Energiewerte haben. Diese Erkenntnis bezeichnet man als *Zeemaneffekt*.

Wichtig ist dabei, dass eine *ausgezeichnete Richtung*, in der das Magnetfeld angelegt wird (meist aus Konvention die 3. oder z-Komponente), den *Energiewert beibehält*. Diese Richtung hat also immer denselben Energiewert, ist also immer erhalten!

# Isotope

Gegeben ist ein Kohlenstoffatomkern mit der Ordnungszahl 6. Damit hat der Kern sechs Protonen (blaue Kreise). Die Neutronen sind grün gekennzeichnet.

 $C_6$ 

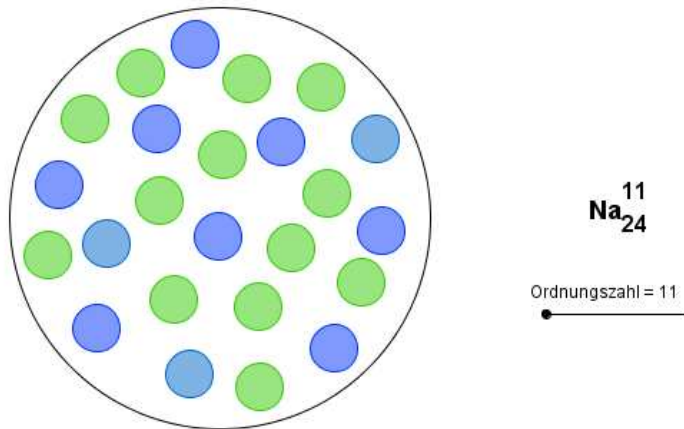
Massenzahl = 12

Bewege den Schieberegler nach rechts um so die Massenzahl, also die Anzahl der Nukleonen, zu verändern.

# Isobare

Abgebildet ist ein Atomkern.

Blaue Kreise symbolisieren wieder Protonen, grüne Neutronen.



Bewege den Schieberegler nach rechts und beobachte was passiert?

Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten kannst du erkennen?

Wofür könnte der Begriff Isobare stehen? (Erinnere dich an die Unterstufe bzw. an den Chemieunterricht: Isotope und Isobare!)

# Der Begriff Isospin/Isobarens핀

Schreibe die richtigen Erkenntnisse in dein Heft!

In den vorherigen Applets wurde gezeigt, dass man unter Isotopen Kerne versteht, die die gleiche Anzahl an  und eine unterschiedliche Anzahl an  besitzen.

Als Isobare werden Teilchen bezeichnet, die die gleiche Anzahl an , aber eine unterschiedliche Anzahl von  und  haben.

Isobare unterscheiden also nicht zwischen  und , sondern nur die Anzahl der  ist wichtig!

Aufgrund dieser Tatsache, dass sich Protonen und Neutronen als zwei Zustände eines Teilchens beschreiben lassen, führte Werner  1932 den Begriff Isobarens핀 ein um genau diese Eigenschaft der beiden Nukleonen zu beschreiben.

Kontrolle

## Vom Spin zum Isospin

Der Zustand des Protons bzw. des Neutrons lässt sich als Funktion darstellen, die vom Ort, der Zeit, dem Spin und dem Isospin abhängt.

$$\psi_p = \psi(\vec{r}, t, S, i = +1) = \text{Protonenzustand}$$

$$\psi_n = \psi(\vec{r}, t, S, i = -1) = \text{Neutronenzustand}$$

Das ist aber nicht die einzige Möglichkeit der Darstellung. Ebenso gut kann man die beiden Funktionen auch in einem zweikomponentigen Vektor zusammenfassen, wobei die eine Komponente das Proton und die andere das Neutron beschreibt.

$$\psi = \begin{pmatrix} U_1(\vec{r}, t, S) \\ U_2(\vec{r}, t, S) \end{pmatrix}$$

Die Funktion  $U_1$  stellt das Proton dar, wobei  $|U_1|^2$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, ein Proton am Ort  $r$ , zur Zeit  $t$  mit dem Spin  $S$  aufzufinden. Das gleiche gilt für das Neutron und  $U_2$ . Damit kann man den Zustand des Protons bzw. des Neutrons auch als Vektor notieren.

$$\psi_p = \begin{pmatrix} U_1(\vec{r}, t, S) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ U_2(\vec{r}, t, S) \end{pmatrix}$$

Bis jetzt haben wir den Isospinbegriff noch gar nicht verwendet. Doch ebenso wie der Drehimpuls oder der Spin lässt sich der Isospin auch selbst als Vektor darstellen.

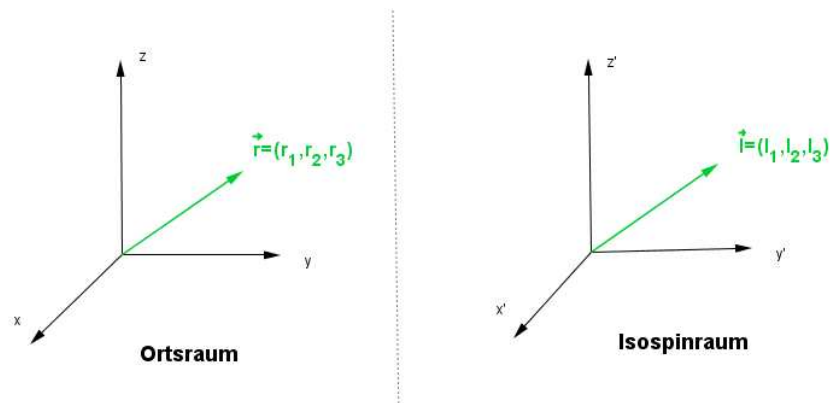
$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

# Ortsraum und Isospinraum

Der Drehimpuls kann als Vektor im Ortsraum dargestellt werden.

Der Isospin hingegen ist ein Vektor im Isospinraum.

In der Grafik sind der Ortsraum und der Isospinraum dargestellt.



In beiden Räumen kann man dieselben Rechenregeln verwenden.

Jedoch ist der Isospinraum ein rein gedankliches Konstrukt,

während der Ortsraum dem Raum unserer Alltagserfahrungen entspricht.



# Die dritte Komponente des Isospins

Die dritte Komponente des Isospinvektors  $I_3$  entscheidet nun darüber, ob ein Nukleon ein Proton oder ein Neutron ist.

$$I_3 = +\frac{1}{2} \quad \text{Proton}$$

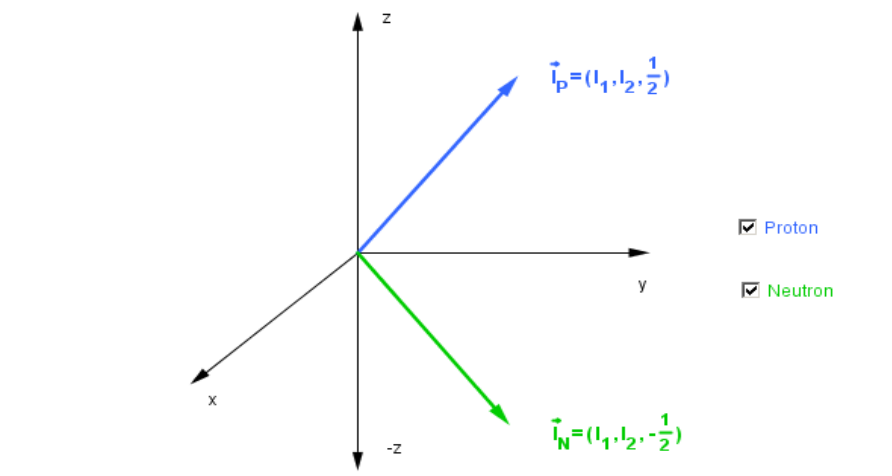
$$I_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{Neutron}$$

Dreht sich also der Isospinvektor im Isospinraum so, dass sich die dritte Komponente von  $+1/2$  auf  $-1/2$  ändert, so wird aus einem Proton ein Neutron.

Der Betrag des Isospinvektors  $I$  für Protonen und Neutronen lautet:

$$I = \frac{1}{2}$$

Hier sind nun ein Protonen- und ein Neutronenzustand im Isospinraum dargestellt.



# Übungen zur Isospinaddition

Schreibe die Lösungen in dein Heft!

1) Der Kern des Deuterons besteht aus einem Proton und einem Neutron.

Wie sieht die dritte Komponente des Isospins für das Deuteron aus?

2) Wie lautet die dritte Komponente des Isospins für den Heliumkern  $\text{He}_2^4$ ?

## Isospin und Ladung

Der Isospin wurde als diejenige Größe eingeführt, die zwischen den zwei Zuständen, dem Proton und dem Neutron, eines Teilchens, des Nukleons, unterscheidet.

Protonen und Neutronen haben allerdings nicht dieselbe Ladung. Das Proton hat positive Elementarladung, das Neutron ist neutral. Der Zusammenhang zwischen dritter Komponente des Isospins  $I_3$  und der Ladung  $Q$  zeigt die folgende Formel:

$$Q = e(I_3 + \frac{1}{2})$$

### Aufgabe:

Kontrolliere die Richtigkeit dieser Formel, indem du den Isospin des Protons und des Neutrons einsetzt und die Ladung berechnest!

## Die Verallgemeinerung der Ladungsformel

Die Formel für die Ladung ist jedoch nur für Protonen und Neutronen gültig.

Die allgemeine Formel lautet hingegen:

$$Q = e(I_3 + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}S)$$

In der Formel ist  $I_3$  dabei die dritte Komponente des Isospins,  $B$  die Baryonenzahl und  $S$  die Strangenesszahl, eine weitere Erhaltungsgröße und Eigenschaft von bestimmten, "seltsamen" Teilchen, die wir hier nicht weiter betrachten wollen.

# Verallgemeinerung des Ladungsoperators

Berechne mit Hilfe der Umformung der Verallgemeinerung der Ladungsformel den Isospin des jeweiligen Teilchens.

Notiere die Umformung in deinem Heft!

1. Welchen Isospin trägt das negative Pion (negative Elementarladung,  $S = 0$ ,  $A = 0$ )?

- a. ☐ - 1
- b. ☐ -1/2
- c. ☐ + 1
- d. ☐ + 1/2
- e. ☐ 0

Kontrolle

2. Welchen Isospin trägt das positive Pion (positive Elementarladung,  $S = 0$ ,  $A = 0$ )?

- a. ☐ 0
- b. ☐ + 1
- c. ☐ - 1
- d. ☐ - 1/2
- e. ☐ + 1/2

Kontrolle

3. Welchen Isospin trägt das negative Kaon (negative Elementarladung,  $S = 1$ ,  $A = 0$ )?

- a. ☐ + 1
- b. ☐ - 1
- c. ☐ 0
- d. ☐ - 1/2
- e. ☐ + 1/2

Kontrolle

4. Welchen Isospin trägt das positive Kaon (positive Elementarladung,  $S = 1$ ,  $A = 0$ )?

- a. ☐ + 1/2
- b. ☐ + 1
- c. ☐ 0
- d. ☐ -1/2
- e. ☐ - 1

Kontrolle

---

5. Welchen Isospin trägt das neutrale Pion ( $S = 0$ ,  $A = 0$ )?

- a. ☐ + 1
- b. ☐ - 1/2
- c. ☐ 0
- d. ☐ + 1/2
- e. ☐ - 1

Kontrolle

---

## Isospin und Masse

Mit der Ladungsformel wäre geklärt, wieso Neutronen und Protonen unterschiedlich geladen sind.

Allerdings haben die beiden Nukleonen auch nicht exakt dieselbe Masse!

Das Neutron ist etwas schwerer als das Proton.

$$m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2 \quad m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2$$

Wie können zwei Teilchen als ein Teilchen in zwei verschiedenen Zuständen aufgefasst werden, wenn die beiden Teilchen unterschiedlich schwer sind?

Die Antwort auf diese Frage wurde zum Teil bereits behandelt.

Auf den vorherigen Seiten wurde gezeigt, dass Protonen und Neutronen auch unterschiedlich geladen sind und dass das mit der dritten Komponente des Isospins erklärt werden kann.

Da das Proton positive Elementarladung trägt und das Neutron neutral ist, unterliegt auch nur das Proton der elektromagnetischen Wechselwirkung und genau da liegt auch der Grund für ihre unterschiedliche Masse.

## Der Isospin und die elektromagnetische Wechselwirkung

Die *elektromagnetische Kraft* wirkt also nur auf das Proton und stört damit die Symmetrie zwischen den beiden Nukleonen. In der Teilchenphysik spricht man von *Symmetriebrechung*, obwohl die Symmetrie eigentlich nicht komplett verletzt, sondern nur in einem bestimmten Bereich gestört wird.

Solange also keine elektromagnetische Wechselwirkung anwesend ist, gilt wegen der Symmetrie zwischen Protonen und Neutronen die ***Isospinerhaltung***!

Wirkt jedoch die elektromagnetische Kraft gilt aufgrund der Symmetriebrechung auch die Erhaltung des Isospins nicht mehr!

## Beispiele zur Isospinerhaltung

Das Wissen, dass die elektromagnetische Wechselwirkung den Isospinerhaltungssatz verletzt, kann nun dazu verwendet werden um herauszufinden, ob bei gegebenen Zerfällen und Reaktionen die elektromagnetische Kraft anwesend ist.

Wirkt in der gegebenen Reaktion die elektromagnetische Kraft?

$$n \rightarrow p + \pi^-$$

Die Antwort lautet hier ja, denn die Isospinerhaltung ist verletzt!

$$I: \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} + 1$$

Anders ist das bei diesem Beispiel (Diese Reaktion ist allerdings aufgrund einer Reihe anderer Erhaltungssätze nicht möglich!):

$$n + n \rightarrow K^- + K^-$$

Hier ist die elektromagnetische Kraft nicht anwesend, denn die Isospinerhaltung gilt!

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$



# Isospinerhaltung und elektromagnetische Kraft

Wirkt bei dieser Reaktion die elektromagnetische Kraft?  
Überprüfe durch die Isospinerhaltung und notiere deine Überlegungen im Heft!

1.  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^0$

- a. ☐ Ja  
b. ☐ Nein

Kontrolle

---

2.  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^- + \pi^+$

- a. ☐ Ja  
b. ☐ Nein

Kontrolle

---

3.  $p + p \rightarrow d + \pi^+$

- a. ☐ Ja  
b. ☐ Nein

Kontrolle

---

4.  $p + \pi^- \rightarrow p + K^-$

- a. ☐ Ja  
b. ☐ Nein

Kontrolle

---

## Die Erhaltung der dritten Komponente des Isospins!

Der Isospinsymmetrie wird durch die elektromagnetische Wechselwirkung gestört und ist damit keine Erhaltungsgröße mehr.

Anders ist das bei der dritten Komponente des Isospins  $I_3$ .

*$I_3$  bleibt immer erhalten!*

Damit ist die dritte Komponente des Isospins ein Maß dafür, ob eine Reaktion stattfinden kann oder nicht. Wird dieser Erhaltungssatz nämlich verletzt, so kann die beschriebene Reaktion nicht ablaufen.

Welche Gleichungen gehören zu welchen Reaktionen? Ordne richtig zu!

Notiere welche Reaktionen nach dem Erhaltungsgesetz für die dritte Komponente des Isospins möglich sind!

$p + p \rightarrow d + \pi^+$	$I_3 : -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$
$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^0$	$I_3 : \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \neq 1 + 0$
$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^- + \pi^+$	$I_3 : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + 1$
$p + \pi^- \rightarrow p + K^-$	$I_3 : \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$
	$I_3 : \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = 1 - 1 + 0 + 1 - 1$

## Der Isospin und die starke Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung ist jene Kraft, die die Nukleonen zusammenhält. Sie unterscheidet also nicht zwischen Protonen und Neutronen, sondern wirkt zwischen allen Nukleonen gleichermaßen.

Die dritte Komponente des Isospins, die zwischen den Zuständen Proton-Neutron entscheidet, ist eine absolute Erhaltungsgröße. Damit ist sie ein Ausdruck für die Symmetrie zwischen den beiden Nukleonen und für die *starke Wechselwirkung*.

Wegen der absoluten Gültigkeit dieser Symmetrie und des dazugehörigen Erhaltungssatzes ist die starke Wechselwirkung eine der vier *fundamentalen Wechselwirkungen*.

### **Aufgabe:**

Informiere dich im Internet über die anderen drei fundamentalen Wechselwirkungskräfte und notiere kurz im Heft was sie bewirken.

## Die Gluonen

Alle fundamentalen Wechselwirkungen werden durch so genannte Austauschteilchen vermittelt.

Die *Austauschteilchen der starken Wechselwirkung* heißen *Gluonen*.

Diese masselosen, neutralen Teilchen "vermitteln" zwischen den Protonen und Neutronen, aber nicht nur zwischen diesen, sondern auch zwischen allen anderen Baryonen, womit gerade alle stark wechselwirkenden Teilchen bezeichnet werden.

### **Aufgabe:**

Notiere in deinem Heft warum die Wechselwirkung der Gluonen komplizierter ist als die der Photonen (Austauschteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung)! Siehe dazu den Link über

.

## Die Quarks

Die Gluonen, der "Leim", hält jedoch streng genommen nicht die Baryonen zusammen, sondern ihre Bestandteile, die Quarks. So besteht ein Proton aus zwei *Up-Quarks* und einem *Down-Quark*, welche durch die Gluonen zu einem Proton "verleimt" werden. Der Unterschied zwischen Proton und Neutron besteht in einem solchen Quark, denn das Neutron besteht aus zwei Down-Quarks und einem Up-Quark.

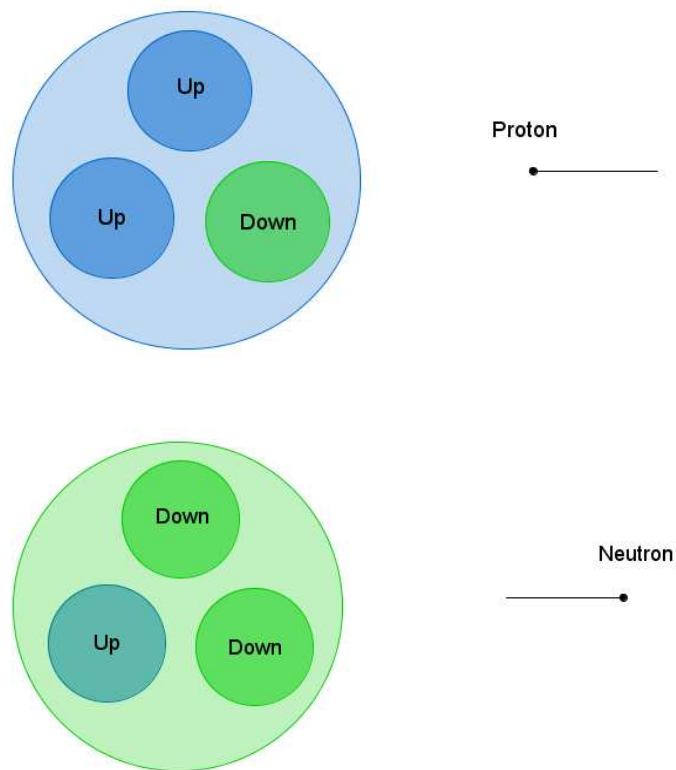
$$Proton : \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{pmatrix} \quad Neutron : \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

Diese Differenz zwischen Protonen und Neutronen kann wiederum als zwei Zustände eines Teilchens interpretiert werden, genauso wie beim Isospin, der einmal den Wert  $+1/2$  (entspricht jetzt dem Up-Quark) und einmal den Wert  $-1/2$  (entspricht dem Down-Quark) hatte.

Man kann also wiederum sagen, dass der Unterschied zwischen den beiden Nukleonen in der dritten Komponente liegt.

## Quarks im Proton und Neutron

Die Quark-Zusammensetzung von Proton und Neutron ist hier nochmals graphisch dargestellt.



Bewege wieder den Schieberegler um zwischen Proton und Neutron zu wechseln.

## Quarks und Ladung

Wie mit dem Isospinvektor kann auch mit den Quarks die unterschiedliche Ladung der Nukleonen erklärt werden. Die ein Up-Quark trägt eine Ladung von  $+2/3e$ , wohingegen ein Down-Quark  $-1/3e$  einnimmt. Somit ergibt das für Proton und Neutron:

$$\text{Proton : } Up + Up + Down = \frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = e$$

$$\text{Neutron : } Up + Down + Down = \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$$

Auch die Laug für andere Baryonen kann mit Hilfe der Quarks bestimmt werden.

## Um welches Pion handelt es sich?

Versuche herauszufinden um welches Pion es sich handelt indem du mit Hilfe der Quarks die Gesamtladung bestimmst.

(Hinweis: ein Antiquark trägt dieselbe Ladung nur mit entgegengesetztem Vorzeichen)

1 Up- Quark und 1 Anti-Down-Quark	neutrales Pion
1 Down-Quark und 1 Anti-Up-Quark	neagtives Pion
	positives Pion

## Um welches Kaon handelt es sich?

Versuche herauszufinden um welches Kaon es sich handelt indem du mit Hilfe der Quarks die Gesamtladung bestimmst.

(Hinweis: ein Antiquark trägt dieselbe Ladung nur mit entgegengesetztem Vorzeichen)

1 Up-Quark und 1 Anti-Strange-Quark	positives Kaon mit Elementarladung e
1 Down-Quark und ein Strange-Quark	neutrales Kaon
	negatives Kaon mit Elementarladung -e



## Quarks und Masse

Dass die beiden Nukleonen unterschiedliche Masse haben, erklärt sich nun wieder damit, dass sie aufgrund ihrer unterschiedlichen Ladung anders mit der elektromagnetischen Kraft wechselwirken und somit die Symmetrie zwischen den beiden Teilchen Proton und Neutron gestört ist.

Die *Symmetrie zwischen Protonen und Neutronen* lässt sich also auf die *Symmetrie zwischen Up- und Down-Quark* in der starke Wechselwirkung zurückführen!

## Die Masse der Austauschteilchen

Die Idee, dass sich die Störung einer Symmetrie auf die Masse von Teilchen auswirkt, erweist sich in der Teilchenphysik als besonders bedeutend.

Die bis jetzt betrachteten ladungsunabhängigen Austauschteilchen, die Photonen bei der elektromagnetischen Kraft und die Gluonen bei der starken Kraft, waren alle masselos. Die *Masselosigkeit der Austauschteilchen* ist wichtig um die Wechselwirkungskräfte in einer konsistenten Theorie beschreiben zu können.

Die *Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung*, die  $W^{+/-}$  und  $Z$ -Bosonen sind allerdings *massiv*, das bedeutet sie haben eine Masse, die nicht Null ist. Damit könnten sie nicht in das konsistente Beschreibungsmodell der Wechselwirkungen eingegliedert werden.

## Das Higgs-Teilchen

Durch die Anwesenheit eines Teilchens, des sogenannten *Higgs-Teilchens* werden die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung gestört. Die Physik spricht wieder von Symmetriebrechung, die dazu führt, dass die zuvor *masselosen Austauschteilchen* plötzlich *Masse bekommen*. Die Symmetriebrechung ist aber wieder nur eine scheinbare, denn die Grundgleichungen, die die schwache Wechselwirkung beschreiben, bleiben erhalten. Genauso wie die dritte Komponente des Isospins auch in der Anwesenheit der elektromagnetischen Wechselwirkung noch erhalten ist.

## Die Vereinheitlichung von Kräften

Dem Higgs-Teilchen kommt damit eine ganz besonders entscheidende Rolle zu, denn durch seine Existenz ist es möglich, alle für die Teilchenphysik *relevanten Wechselwirkungen*, also die elektromagnetische, die starke und die schwache, in einer Theorie zu beschreiben.

Deswegen ist die Suche nach dem Higgs-Teilchen auch eines der Ziele der CERN-Experimente, denn obwohl das Higgs-Teilchen formal schon definiert und in einer *vollständige und konsistenten Theorie* integriert wurde, wurde es bis jetzt aufgrund seiner großen Masse noch nicht gefunden.

(Ein Teilchen mit großer Masse zu finden bedeutet nämlich viel Energie bei der Suche aufbringen zu können!)

### **Aufgabe:**

Lies dir den Lexikoneintrag zur [Vereinheitlichung](#) durch und schreibe kurz im Heft die bis jetzt gemachten Vereinheitlichungen nieder.

## Die "Weltformel"

Der letzte Schritt, um alle fundamentalen Wechselwirkungen in einer einzigen Formel, der Weltformel, beschreiben zu können, liegt in der Integration der Gravitation in die Vereinheitlichung der Kräfte.

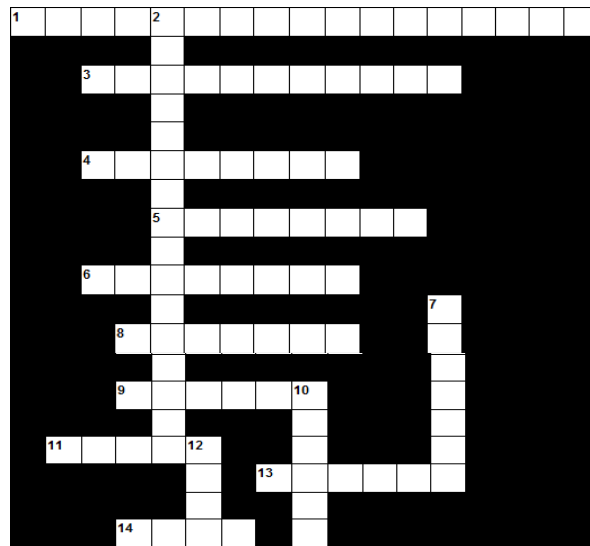
Dazu existieren mehrere verschiedene Theorien, jedoch beantwortet keine von ihnen alle Fragen bzw. ist keine von ihnen bewiesen worden.

### **Aufgabe:**

Lies dir im Internet den Lexikoneintrag (siehe Links) zur durch und notiere die kurz worum es geht.

# Zusammenfassung

Jetzt kannst du überprüfen, wie viel du dir gemerkt hast!



## Waagrecht

1. Das Ziel der Physiker und Physikerinnen ist die ... aller fundamentalen Wechselwirkungskräfte.
3. Der Isospinvektor lebt im ...
4. Proton und Neutron können als zwei Zustände eines ... aufgefasst werden.
5. Energie, Impuls und Drehimpuls bleiben in einem abgeschlossenen System ...
6. Die Nukleonen haben unterschiedliche Masse. Das Neutron ist ... als das Proton.
8. Diese Teilchen halten die Nukleonen zusammen.
9. Protonen, Neutronen und alle anderen Hadronen sind aus ihnen aufgebaut.
11. Damit die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung Masse bekommen können, ohne die konsistente Theorie zu stören, braucht man das so genannte ...-Teilchen.
13. Welche Komponente des Isospins ist immer erhalten?
14. Das positive Pion hat welchen Isospinwert?

## Senkrecht

2. Wenn in einem System keine elektromagnetische Wechselwirkung vorhanden ist, gilt die .....
7. Kerne mit gleicher Nukleonenzahl und unterschiedlicher Ordnungszahl nennt man ...
10. Der Erhaltung der dritten Komponente des Isospins bzw. die Symmetrie zwischen den Nukleonen weist auf welche Wechselwirkung hin?
12. Den inneren Drehimpuls bezeichnet man auch als ...



# Begriffslexikon

**Abelsch** Als abelsch wird eine  $\rightarrow$  *Gruppe* bezeichnet, wenn sie kommutativ ist. Das bedeutet, es gilt:  $a \circ b = b \circ a$ .

**Abelsche innere Symmetrien** Zu den abelschen inneren Symmetrien zählen die  $\rightarrow$  *Ladungserhaltung*, die  $\rightarrow$  *Baryonenzahlerhaltung* und die  $\rightarrow$  *Leptonenzahlerhaltung*, die invariant bezüglich Feldtransformationen und zusätzlich  $\rightarrow$  *abelsch* sind.

**Antikommutator** Als Antikommutator bezeichnet man die Operation:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A}$$

**Antilinear** Darunter versteht man einen Operator  $\hat{A}$  der folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned}\hat{A}(a\psi) &= a^* \hat{A}\psi \\ \hat{A}(a\psi + b\psi) &= a^* \hat{A}\psi + b^* \hat{A}\psi\end{aligned}$$

**Antiunitär** Als antiunitär bezeichnet man einen Operator, der anstelle der Eigenschaft der Linearität, die der  $\rightarrow$  *Antilinearität* besitzt.

**Asymptotische Freiheit** Der Begriff Asymptotische Freiheit beschreibt die schwache Kopplung bei sehr hohen Energien der starken Wechselwirkung.

**Axiale Vektoren** Als axialen Vektor oder *Pseudovektor* bezeichnet man einen Vektor der sein Vorzeichen nach der Anwendung des Paritätsoperators nicht verändert.

**Baryonen** Baryonen sind Hadronen und wechselwirken daher stark. Sie bestehen aus drei  $\rightarrow$  *Quarks* (bzw. Antiquarks bei Antiteilchen) und haben halbzahligen Spin. Für sie gilt die Baryonenzahlerhaltung! Zu den Baryonen zählen Protonen und Neutronen.

**Baryonenzahlerhaltung** Die Baryonenzahl bleibt in allen Reaktionen erhalten.

**Bosonen** Bosonen sind Teilchen mit ganzzahligem Spin.



**Confinement** siehe  $\rightarrow$  *Infrarotklaverei*

**CP - Invarianz** Unter der CP-Invarianz versteht man die Invarianz nach der Anwendung des  $\rightarrow$  *Ladungskonjugationsoperators* und des des  $\rightarrow$  *Paritätsoperators*. In der schwachen Wechselwirkung ist die CP-Invarianz verletzt!

**CPT - Theorem** Das CPT-Theorem besagt, dass das Produkt aus  $\rightarrow$  *Ladungskonjugation*,  $\rightarrow$  *Parität* und  $\rightarrow$  *Zeitumkehr* mit jedem Hamiltonoperator vertauscht und damit erhalten bleibt.

**D'Alembert Operator** Für den d'Alembert Operator  $\square$  gilt:  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ . (in der Teilchenphysik fällt der Teil  $\frac{1}{c^2}$  weg, da in Einheiten von  $c$  und  $\hbar$  gearbeitet wird).

**Dirac-Gleichung** Die Dirac-Gleichung stellt die relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen dar und lautet:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

**Diskontinuierliche Symmetrien** Diskontinuierliche oder *diskrete Symmetrien* führen auf einen multiplikativen Erhaltungssatz.

**Diskrete Symmetrien** siehe  $\rightarrow$  *diskontinuierliche Symmetrien*

**Drehimpulserhaltung** In einem abgeschlossenen System bleibt der Drehimpuls erhalten.

**Eichtransformation** Bei der Eichtransformation wird zur Lagrange-gleichung eine totale Zeitableitung einer Funktion addiert. Diese ändert nichts an den Bewegungsgleichungen.

**Eichsymmetrie** Die Invarianz der  $\rightarrow$  *Eichtransformation* führt auf die Erhaltung der Phase. Man spricht von Eichsymmetrie, Phasensymmetrie.

**Eichtransformation** Bei der Eichtransformation wird zur  $\rightarrow$  *Lagrange-funktion* die totale Zeitableitung dazu addiert. Das ändert nichts an der Form der Bewegungsgleichungen.

**Energieerhaltung** In einem abgeschlossenen System bleibt die Energie erhalten.

**Epsilontensor** Durch diesen  $\rightarrow$  *Tensor* lässt sich das  $\rightarrow$  *Spatprodukt* (und damit auch das Kreuzprodukt) eindimensional mit Indizes anschreiben:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \epsilon_{ijk} b_j c_k$$

Es gilt für den Epsilontensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i, j, k \text{ zyklisch,} \\ -1, & \text{falls } i, j, k \text{ antizyklisch,} \\ 0, & \text{sonst (wenn zwei der Indizes gleich sind).} \end{cases}$$

**Euler-Lagrange-Gleichung** Die Euler-Lagrange-Gleichung erhält man indem man ein Funktional minimal macht und ist damit gleichbedeutend mit der Stationarität des Funktional.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}$$

**Feldgleichungen** Aus dem  $\rightarrow$  *Hamiltonprinzip* werden in der Feldtheorie als Bewegungsgleichungen die so genannten Feldgleichungen hergeleitet:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{r|\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r}$$

**Feldstärketensor** Der Feldstärketensor ist folgendermaßen gegeben:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & -B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

**Fermionen** Fermionen sind Teilchen mit halbzahligen Spin.

**Funktion** Eine Funktion ist eine Vorschrift die jedem x-Wert genau eine Zahl (y-Wert) zuordnet:  $y = y(x)$

**Funktional** Ein Funktional ist eine Vorschrift, die jeder Funktion eine Zahl zuordnet:  $I = I[y]$

**Gaußscher Integralsatz** Der Gaußsche Integralsatz verbindet Volumensintegrale mit Oberflächenintegralen. Das Feld  $\vec{V}$  durchsetzt das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $S$  umschließt dieses Volumen.

$$\int_S \vec{V} \cdot \vec{S} = \int_V \text{div} \vec{V} dv$$

**Gell-Mann - Nishijima - Relation** Die Gell-Mann - Nishijima - Relation drückt den Zusammenhang zwischen Ladung, Baryonenzahl, Strangeness und dritter Komponente des Isospins (bzw. umgeschrieben zwischen Ladung, Isospin und Hyperladung) aus:

$$Q = \frac{1}{2}(B + S) + I_3$$

**Generatoren** Generatoren werden auch Erzeugende einer Transformationsgruppe genannt. Aus ihnen kann der Transformationsoperator konstruiert werden.

**G-Parität** Die beiden Symmetrien Isospin und Drehimpuls weisen viele (mathematischen) Ähnlichkeiten auf. So existiert auch ein Pendant zur Parität im Isospin-Raum: die G-Parität. Sie schränkt die Möglichkeiten verschiedenster Reaktionen weiter ein.

**Gruppe** Der mathematische Begriff der Gruppe bezeichnet eine Menge  $G$  für die folgenden Eigenschaften gelten:

- $G$  ist abgeschlossen:  $a$  und  $b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$
- $G$  ist assoziativ:  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- $G$  besitzt ein neutrales Element  $e$  und zu jedem  $a$  ein inverses Element  $a^{-1}$  mit  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ .

**Hadronen** Als Hadronen bezeichnet man Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen. Von ihnen gibt es zwei Arten: die  $\rightarrow$  *Baryonen* mit halbzahligem Spin und die  $\rightarrow$  *Mesonen* mit ganzzahligem Spin.

**Hamiltonsches Prinzip** Das Hamiltonsche Prinzip wird auch Prinzip der kleinsten Wirkung genannt, da es die Stationarität des Wirkungsfunktionals fordert.

**Helizität** Die Helizität drückt die Polarisierung eines Teilchens aus:

$$\mathcal{H} = 2 \frac{\vec{J} \cdot \vec{p}}{\hbar}$$

**Hermitizität** Die Hermitizität ist eine notwendige Bedingung dafür, reelle Erwartungswerte und damit realistische Ergebnisse zu erhalten. Für den Operator  $\hat{U}$  muss dabei gelten:  $\hat{U} = \hat{U}^\dagger$ .

**Higgs-Mechanismus** Der Higgs-Mechanismus beschreibt, wie die Teilchen Masse bekommen. (auch Higgs-Kibble-Mechanismus genannt)

**Higgs-Teilchen** Das Higgs-Teilchen spielt in der Massenbeschreibung der Teilchen durch den  $\rightarrow$  *Higgs-Mechanismus* eine wichtige Rolle und seine (noch ausstehende experimentelle) Entdeckung entscheidet über die Gültigkeit des Standardmodells der fundamentalen Wechselwirkungen.

**Homogenität des Raumes** Unter der Homogenität des Raums versteht man die Symmetrie, welche zur räumlichen Verschiebung, der Translation, gehört.

**Homogenität der Zeit** Unter der Homogenität der Zeit versteht man die Symmetrie, die zur zeitlichen Verschiebung gehört.

**Hyperladung** Die Hyperladung ist eine alternative Form der Darstellung der Strangeness und kann als halber Ladungsschwerpunkt definiert werden.

**Hyperonen** Unter Hyperonen versteht man ein instabiles  $\rightarrow$  *Baryon* mit einer Masse größer der Neutronenmasse.

**Impulserhaltung** In einem abgeschlossenen System ist der Impuls erhalten.

**Infrarotsklaverei** Der Begriff Infrarotsklaverei oder *Confinement* beschreibt die starke Kopplung der starken Wechselwirkung bei wenig Energie.

**Innere Symmetrien** Unter inneren Symmetrien versteht man die Invarianz einer Transformation eines Feldes. Man unterscheidet zwischen  $\rightarrow$  *abelschen* und  $\rightarrow$  *nicht-abelschen inneren Symmetrien*

**Invarianter Unterraum** Unter einem invarianten Unterraum versteht man eine Menge von Zuständen, die sich bei der Anwendung irgendeines Operators reproduzieren.

**Irreduzible Darstellung** Die irreduzible Darstellung einer Gruppe ist ein *invarianter Unterraum* einer Gruppe, die auch *Multiplett* genannt wird.

**Isomorph** Zwei Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  heißen isomorph zueinander, wenn es eine bijektive Abbildung  $h$  gibt, die die Eigenschaften eines Gruppenhomomorphismus besitzt:

$$h(a * b) = h(a) \circ h(b) \text{ für alle } a, b \in G_1$$

**Isospin/ Isobarens핀** Der Isospin oder Isobarens핀 bezeichnet die Symmetrie zwischen Protonen und Neutronen bei starker Wechselwirkung. Dort können beide als zwei Zustände eines Teilchens aufgefasst werden. Als Isobare bezeichnet man Kerne mit gleicher Massenzahl.

**Isotropie des Raumes** Diese Symmetrie gehört zur Raumdrehung.

**Iteration** Bei einer iterativen Methode (Iterationsverfahren) wird ausgehend von bekannten Näherungswerten schrittweise, durch Iteration, eine Folge von Näherungswerten erzeugt, die gegen die betreffende Lösung konvergiert.

**Kanonische Vertauschungsrelation** Die kanonischen Vertauschungsrelation zweier Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  ist gegeben durch:

$$[\hat{A}_x, \hat{B}_y] = \hat{A}_x \hat{B}_y - \hat{B}_y \hat{A}_x = i\hbar \delta_{x,y}$$

**Kaonen** Als Kaonen bezeichnet man vier Mesonen, die ein Strange-Quark beinhalten, was dazu führt, dass ihnen jeweils eine  $\rightarrow$  *Strangeness*-Zahl zugeordnet ist.

**Klein-Gordon-Gleichung** Die Klein-Gordon Gleichung ist die relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung für Materieteilchen mit dem Laplace-Operator  $\Delta$  und dem d'Alembert Operator  $\square$ :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\psi = (\square + m^2)\psi = 0$$

**Kommutator** Als Kommutator bezeichnet man die Operation:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot \hat{A}$$

**Kommutieren** Zwei Operatoren kommutieren miteinander, wenn ihr  $\rightarrow$  *Kommutator* 0 ergibt.

**Kontinuitätsgleichung** Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Änderung der Strom- und der Ladungsdichte und führt auf die Erhaltung der Ladung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

**Kontinuierliche Symmetrien** Unter kontinuierlichen Symmetrien versteht man Symmetrien, die auf einen additiven Erhaltungssatz führen. Das bedeutet, die Summe einer Quantenzahl bleibt erhalten.

**Ladungskonjugation** Die Operation der Ladungskonjugation vertauscht ein Teilchen mit seinem Antiteilchen.

**Lagrangedichte** Mittels dreidimensionaler Integration über die Lagrangedichte erhält man in der Feldtheorie die Lagrangefunktion und daraus in weiterer Folge die Bewegungsgleichungen eines Systems.

**Lagrangefunktion** Die Lagrangefunktion ist als Differenz der kinetischen und potentiellen Energie definiert:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

**Lagrangegleichungen** (2. Art)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f)$$

**Laplace-Operator** Das Skalarprodukt des Nablaoperators mit sich selbst nennt man Laplace-Operator:  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$

**Leptonen** Teilchen, die der schwachen, nicht aber der starken Wechselwirkung unterliegen, heißen Leptonen. Zu ihnen gehören Elektron, Myon, Tauon und die jeweiligen dazugehörigen Neutrinos mit Antiteilchen.

**Mesonen** Mesonen gehören zu den  $\rightarrow$  *Baryonen* und wechselwirken stark. Sie haben ganzzahligen Spin und bestehen aus zwei  $\rightarrow$  *Quarks*. Zu ihnen gehören Pionen und Kaonen.

**Messung (Quantenmechanik)** Eine Messung untersucht eine bestimmte Eigenschaft eines Teilchens/Objekts.

**Multiplett** Als Multiplett wird eine *irreduzibel Darstellung* bzw. ein *invarianter Unterraum* bezeichnet.

**Myonen** Myonen gehören zu den  $\rightarrow$  *Leptonen* und bleiben in allen schwachen Prozessen erhalten.

**Nabla-Operator** Der Gradient eines Skalars  $A$  oder eines Vektors  $\vec{A}$  wird mit dem Nabla -Operator angeschrieben:  $grad A = \nabla A$  bzw.  $grad \vec{A} = \nabla \vec{A}$ . Dabei stellt der Nabla-Operator die partielle Ableitung aller  $n$  Komponenten dar und ist selbst eine Vektor:  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$

**Noether Theorem** Das Noethertheorem besagt, dass aus jeder Invarianz einer Symmetrietransformation ein Erhaltungssatz folgt.

**Observable** Die Observable ist eine Variable, die einer (messbaren) physikalischen Größe entspricht.

**Operator** Unter einem Operator versteht man eine eindeutige Abbildung eines Elements eines (beispielsweise) Vektorraums auf ein anderes Element eines Vektorraums.

**Parität** Die Parität beschreibt die Operation der Raumspiegelung.

**Pauli-Matrizen** Die Pauli-matrizen sind  $2 \times 2$ -Matrizen, die zusammen mit der Einheitsmatrix als Generatoren des Isospinsystems fungieren.

**Polare Vektoren** Wendet man auf polare Vektoren den Paritätsoperator an, so ändern diese ihr Vorzeichen.

**Pseudoskalar** Teilchen, die nach zweifacher Anwendung des Paritätsopeartors ihr Vorzeichen ändern, nennt man pseudoskalare Teilchen.

**Pseudovektor** siehe  $\rightarrow$  *axialer Vektor*

**Quantenchromodynamik-QCD** Die QCD ist das mathematische Modell der starken Wechselwirkung.

**Quantenelektrodynamik-QED** Die QED ist das mathematische Modell der elektromagnetischen Wechselwirkung.

**Quarks** Unter Quarks versteht man die Bestandteile der Hadronen, die durch die Gluonen, den Austauscheteilchen der starken Wechselwirkung, zusammengehalten werden.

**Relativität der Raum-Zeit** Die Raltivität der Raum-Zeit ist diejenige Symmetrie, die zur räumlichen Verschiebung um einen zeitunabhängigen Vektor gehört.

**Schrödinger-Pauli-Gleichung** Darunter versteht man die nicht-relativistische Näherung de  $r \rightarrow$  *Dirac-Gleichung*.

**Schwache Wechselwirkung** Die schwache Wechselwirkung ist diejenige Kraft, die für den radioaktiven Zerfall des Kerns verantwortlich ist.

**Selbst-adjungiert** Selbst-adjungiert ist eine andere Bezeichnung für hermitisch ( $\rightarrow$  *Hermitizität*).

**Singulär** Als singuläre Matrix bezeichnet man eine nicht invertierbare Matrix.

**Skalarfeld** Als Skalarfeld bezeichnet man eine Funktion, die jedem Raumpunkt eine Zahl, also ein Skalar, zuordnet.

**SO(3)** Die  $SO(3)$ , auch Rotationsgruppe genannt, ist eine dreiparametrische kontinuierlich verbundenen Gruppe. Sie umfasst alle  $3 \times 3$ -Matrizen mit Determinante +1 und ist ein Paradebeispiel einer  $\rightarrow$  *Lie-Gruppe*.

**Spatprodukt** Das Spatprodukt ist eine Kombination aus Skalar- und



Kreuzprodukt:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

**Starke Wechselwirkung** Die starke Wechselwirkung bindet die  $\rightarrow$  Quarks mittels Gluonen aneinander.

**Strangeness** Die Strangeness ist eine Erhaltungsgröße in der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung und ist die entscheidende Quantenzahl bei der CP-Verletzung.

**Stufenoperator** Als Stufenoperatoren werden hermitesche Operatoren bezeichnet, welche bei der Anwendung auf die Eigenfunktionen die Eigenwerte erniedrigen bzw. erhöhen.

**SU(n)** Die  $SU(n)$  ist eine unitäre Gruppe, die von den unitären  $n \times n$ -Matrizen mit Determinante +1 gebildet werden. Lässt man die Einschränkung für die Determinante weg, so spricht man von der  $\rightarrow U(n)$ .

**SU(2)** Die  $SU(2)$  ist ein Spezialfall der  $\rightarrow SU(n)$ . Sie beschreibt den Isospin und die schwache Wechselwirkung.

**SU(3)** Die  $SU(3)$  ist wiederum ein Spezialfall der  $\rightarrow SU(n)$ . Mit ihren  $3 \times 3$ -Matrizen beschreibt sie die  $\rightarrow$  Quantenchromodynamik.

**Tensor** Ein Tensor ist eine Abbildung, die in jeder Variable linear ist. Als einstufigen Tensor oder Tensor 1. Stufe bezeichnet man ein Skalar, als zweistufigen einen (Spalten-)Vektor, als dreistufigen eine Matrix.

**Trialityproblem** Da es theoretisch eine Anziehung zwischen allen Quarks geben sollte, wären 81 Bindungszustände möglich, die jedoch in Realität nicht alle existieren.

**U(n)** Die  $U(n)$  ist eine unitäre, abelsche Gruppe, die von den unitären  $n \times n$ -Matrizen gebildet wird. Die wichtigste dieser Gruppen ist die  $U(1)$ .

**U(1)** Die  $U(1)$  ist eine abelsche unitäre Gruppe und repräsentiert die elektromagnetische Wechselwirkung.

**Unimodular** Als unimodular bezeichnet man eine Matrix mit  $\det = \pm 1$ .

**Unitarität** Als unitären Operator bezeichnet man einen Operator dessen inverser Operator gleich dem gedagterten Operator ist.

**Variationsrechnung** Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit  $\rightarrow$  *Funktionalen*, die für bestimmte Funktionen (stationäre) extremal werden.

**Vektorfeld** Als Vektorfeld bezeichnet man eine Funktion, die jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnet.

**Vektormesonen** Als Vektormesonen bezeichnet man Mesonen mit Spin 1.

**Vertauschungsrelation** siehe  $\rightarrow$  *Kommutator*

**Zeemaneffekt** Beim Zeemaneffekt kommt es beim Anlegen eines Magnetfeldes zur Aufspaltung zuvor entarteter Zustände in unterschiedliche Energieniveaus.

**Zeitabhängige Schrödingergleichung** Die Zeitentwicklung in der Quantenmechanik wird mittels zeitabhängiger Schrödingergleichung beschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

**Zeitumkehr** Diese diskrete Symmetrie ändert das Vorzeichen der Zeit, des Impulses und des Drehimpulses, lässt den Ort jedoch unverändert. Diese Symmetrie führt auf keine Erhaltungsgröße.

**Zeitunabhängige Schrödingergleichung** Bei der zeitunabhängigen Schrödingergleichung handelt es sich um eine Eigenwertgleichung, die aus der  $\rightarrow$  *zeitabhängigen Schrödingergleichung* mittels Separationsansatzes ermittelt werden kann:

$$\hat{H} \psi = E \psi$$

**Zusammenhang Reichweite einer Wechselwirkung und Masse der Austauschteilchen** Die Reichweite  $R$  und die Masse  $M$  hängen indirekt proportional zusammen (Compton-Wellenlänge):

$$R = \frac{\hbar}{Mc}$$

**Zustand** Der Zustand beschreibt die Gesamtheit aller physikalischen Eigenschaften eines Teilchens/Objekts.

**Zweier-Spinorfeld** Ein Zweier-Spinorfeld ist eine Funktion, die jedem Raumpunkt einen zweidimensionalen Vektor zuordnet.



## Literaturverzeichnis

[Ecker] Ecker, Gerhard: Skriptum zu Kern- und Teilchenphysik für das Lehramt; Universität Wien; SS 2009; Wien

[Frauenfelder/Henley] Frauenfelder und Henley: Teilchen und Kerne, Subatomare Physik; Oldenbourg; 2.Auflage 1987

[Feynman] Feynman, Richard: Vorlesungen über Physik Band 1; München, Wien; Oldenbourg; 2. Auflage, 1991

[Fließbach I] Fließbach, Torsten: Mechanik - Lehrbuch zur Theoretischen Physik I, 5. Auflage, 2007, Spektrum Akademischer Verlag, München

[Fließbach II] Fließbach, Torsten: Elektrodynamik - Lehrbuch zur Theoretischen Physik II; Spektrum Akademischer Verlag; 2.Auflage 1997; Heidelberg, Berlin, Oxford

[Greiner 5] Greiner, Walter und Müller, Berndt: Theoretische Physik Band 5 - Quantenmechanik Symmetrien; Verlag Harri Deutsch; 3.Auflage 1990; Zürich, Frankfurt am Main,

[Greiner 8] Greiner, Walter und Müller, Berndt: Theoretische Physik Band 8 - Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung; Verlag Harri Deutsch; 2. Auflage 1995; Thun, Frankfurt am Main

[Österreichischer Physiklehrplan] Bmukk: [http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11862/lp\\_neu\\_ahs\\_10.pdf](http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11862/lp_neu_ahs_10.pdf)

[Tipler] Tipler, Mosca: Physik; Spektrum Akademischer Verlag; 2.Auflage; 2007; Heidelberg

[TU-München] TU-München: [http://www.e18.physik.tu-muenchen.de/skript/V\\_A\\_Theorie\\_schwachen>Wechs.html](http://www.e18.physik.tu-muenchen.de/skript/V_A_Theorie_schwachen>Wechs.html)

### Für den Lernpfad:

[Lernpfad] Isospinlernpfad:<http://www.unet.univie.ac.at/~a0555426/Titelseite.html>

[Isospin-Techniklexikon] <http://www.techniklexikon.net/d/isospin/isospin.htm>

[Isotope in der Medizin] [http://www2.chemie.uni-erlangen.de/projects/vsc/chemie-mediziner-neu/atombau/radioaktiv\\_medizin.html](http://www2.chemie.uni-erlangen.de/projects/vsc/chemie-mediziner-neu/atombau/radioaktiv_medizin.html)

[Lexikon der Astrophysik] [http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt\\_i02.html](http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/lexdt_i02.html)

[Quantenwelt] <http://www.quantenwelt.de>

[Quantenzahlenüberblick] [http://www.xplora.org/downloads/Knoppix/Teilchenphysik/grundl\\_d\\_tph/sm\\_et/sm\\_et\\_03b.html#S](http://www.xplora.org/downloads/Knoppix/Teilchenphysik/grundl_d_tph/sm_et/sm_et_03b.html#S)

[Symmetrien und Naturgesetze] [http://www.xplora.org/downloads/Knoppix/Teilchenphysik/grundl\\_d\\_tph/sm\\_et/sm\\_et\\_03b.html#S](http://www.xplora.org/downloads/Knoppix/Teilchenphysik/grundl_d_tph/sm_et/sm_et_03b.html#S)

[Techniklexikon] <http://www.techniklexikon.net>

[Teilchenphysik] <http://www.der-kosmos.de/teilchenphysik.htm>

[Video-Higgs-Teilchen] <http://www.youtube.com/watch?v=-f2Y4fXFNx4>

#### **Grafiken erstellt mit:**

[GeoGebra] <http://www.geogebra.org>

#### **Für die Erstellung des Lernpfades verwendete Software:**

[HotPotatoes] <http://www.hotpotatoes.de>

[GeoGebra]

## **Lebenslauf**

### **Persönliche Angaben**

Name: Christina Peham  
Geburtsdatum: 13.4.1987  
Geburtsort: Bad Ischl, Oberösterreich  
Heimatort: Sankt Wolfgang im Salzkammergut, OÖ  
Anschrift: Mollardgasse 83/11, 1060 Wien

### **Ausbildung**

seit 2007 : Slawistikstudium, Universität Wien  
2007 - 2011: Lehramtsstudium Physik/Mathematik, Universität Wien  
2005 - 2007: Studium der Technischen Physik, JKU Linz  
2005: Matura am BG Bad Ischl, OÖ  
1997 - 2005: Neusprachlicher Zweig des Bundesgymnasiums Bad Ischl, OÖ  
1993 - 1997: Volksschule Rußbach bei St. Wolfgang im Salzkammergut, OÖ

### **Sprachkenntnisse**

Deutsch: Muttersprache  
Englisch: Fließend in Wort und Schrift  
Französisch: Maturaniveau  
Latein: Maturaniveau  
Russisch: Grundkenntnisse

### **Interessen**

Musik: Gitarre spielen  
Sport: Laufen, Bogenschießen, Badminton, Wandern  
Reisen: V.a. Großbritannien  
Lesen: Deutsch- und englischsprachige Literatur